

概念格理论与方法及其研究展望

李金海^{1,2} 魏 玲³ 张 卓⁴ 翟岩慧⁵ 张 涛⁶ 智慧来⁷ 米允龙⁸

摘要 概念格理论与方法是形式概念分析研究中的基本内容,该研究已取得一系列的重要成果,主要集中在概念格模型推广、概念格构造、概念格约简、基于概念格的规则提取、概念知识空间、概念格的粒计算方法及概念格应用等研究方向。为了进一步促进形式概念分析的研究与发展,文中对现有的概念格理论与方法进行梳理、总结与展望。特别地,指出上述研究方向中存在的关键科学问题,进行一些理论分析,并提出初步的研究思路,为今后解决这些问题提供有益的参考。

关键词 概念格, 形式概念分析, 粒计算, 粗糙集, 三支决策

引用格式 李金海,魏 玲,张 卓,翟岩慧,张 涛,智慧来,米允龙. 概念格理论与方法及其研究展望. 模式识别与人工智能, 2020, 33(7) : 619–642.

DOI 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202007005

中图法分类号 TP 18

Concept Lattice Theory and Method and Their Research Prospect

LI Jinhai^{1,2}, WEI Ling³, ZHANG Zhuo⁴, ZHAI Yanhui⁵, ZHANG Tao⁶, ZHI Huilai⁷, MI Yunlong⁸

ABSTRACT Concept lattice theory and method are the basic topics in the study of formal concept analysis, and important achievements are obtained. The previous study mainly focus on the generalization of concept lattice models, concept lattice construction, concept lattice reduction, concept lattice based rule acquisition, conceptual knowledge space, granular computing method for concept lattice and concept lattice applications. To further promote the study and the development of formal concept analysis theory, the existing research on theories and methods of concept lattice is summarized in detail, and an outlook is also produced for the researchers. Especially, it is pointed out that there are some key scientific problems in the above researches, a theoretical analysis of these problems is presented, and some preliminary research thoughts are provided as well. The obtained results offer a useful piece of advice for solving the problems in the future.

收稿日期:2020-06-15;录用日期:2020-07-27

Manuscript received June 15, 2020;

accepted July 27, 2020

国家自然科学基金项目(No. 11971211,61772021,61972238)

资助

Supported by National Natural Science Foundation of China(No. 11971211,61772021,61972238)

本文责任编辑 苗夺谦

Recommended by Associate Editor MIAO Duoqian

1. 昆明理工大学 数据科学研究中心 昆明 650500

2. 昆明理工大学 理学院 昆明 650500

3. 西北大学 数学学院 西安 710127

4. 郑州大学 信息工程学院 郑州 450001

5. 山西大学 计算机与信息技术学院 太原 030006

6. 燕山大学 信息科学与工程学院 秦皇岛 066004

7. 河南理工大学 计算机科学与技术学院 焦作 454000

8. 中国科学院大学 计算机科学与技术学院 北京 100049

1. Data Science Research Center, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500

2. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500

3. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127

4. School of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001

5. School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006

6. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004

7. College of Computer Science and Technology, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000

8. School of Computer Science and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

Key Words Concept Lattice, Formal Concept Analysis, Granular Computing, Rough Set, Three-Way Decision

Citation LI J H, WEI L, ZHANG Z, ZHAI Y H, ZHANG T, ZHI H L, MI Y L. Concept Lattice Theory and Method and Their Research Prospect. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2020, 33(7): 619–642.

概念格^[1]是形式概念分析理论中用于数据分析与处理的核心工具,也是一种挖掘数据关联的有效方法。概念格的数学基础是格论,可视化工具是Hasse图,研究方法是抽象代数、离散数学、数据结构与算法分析、模糊集^[2]、粗糙集^[3]、粒计算^[4]、三支决策^[5]、认知计算与逻辑学等。众所周知,概念格是形式概念分析中最受关注的内容之一,它提出的初衷是希望通过形式化的方式刻画现实中的实体对象或抽象概念,并建立相应的层次知识结构,描述概念之间的泛化与特化关系^[6]。因此,概念格的研究背景和意义非常明确,涉及的理论、方法和分析工具多样化。截至目前,概念格已在信息检索^[7]、知识发现^[8]、关联分析^[9]、推荐系统^[10]、软件工程^[11]等领域取得广泛应用。

概念格的出发点是布尔型数据,它在形式概念分析中被称为形式背景^[6]。这种数据的特点是对象和属性(有些领域也称为样本和特征)之间有无关系。这种有无关系是可以叠加的,即多个对象与多个属性也可以讨论有关系(意指对象和属性之间两两有关系)或没有关系,那么什么时候对象和属性的搭配能够同时达到极大状态,即在多个对象和多个属性有关系的前提下,当一方固定时,另一方取到最大值,一旦多个对象和多个属性达到极大状态时就形成形式概念^[1]。需要指出的是,形式概念是知识表示的基本单元,也是一类概念知识。显然,在形式概念分析中,对象或属性是否属于某一概念是确定的^[12]。对于一个形式背景,多个对象和多个属性之间会出现不同的极大状态,这意味着形式概念的个数众多。一个形式背景的形式概念通常都不是孤立存在的,它们之间存在包含或部分包含关系。在形式概念分析中,这种关系被称为概念之间的泛化-特化关系^[6],据此可将一个形式背景的形式概念进行知识结构化。综上可知,概念格是形式概念配备泛化-特化关系生成的。

下面介绍概念格的主要研究问题。首先,在讨论概念格时,第一个问题就是概念到底是什么或研究什么样的概念,Wille^[1]只是给出形式概念的定义,它是反序Galois连接的不动点^[13],也是布尔矩阵(0和1为元素组成的二维表)中数字全为1的极大填

充块。随着研究的不断深入,学者们发现形式概念只是一种最简单的概念知识,对研究对象布尔型数据的要求较苛刻,现实中遇到的数据往往较复杂,即多数情况下不满足布尔型数据的要求,从而限制方法的广泛应用。受此启发,一些学者又相继提出各种扩展概念^[14–21],它们的研究对象比布尔型数据更宽广,适用范围更大。这类研究称为概念格的模型推广。

当确定讨论某一类概念之后,需要进一步考虑如何从特定数据中找出所有概念,该问题称为概念格构造^[6]。需要指出的是,概念格构造是一个NP-hard问题,这意味着完成这项任务耗时巨大,从而吸引众多学者的研究兴趣。众所周知,此类问题若靠单纯的穷举法进行求解,则效果是不理想的,因为问题空间的所有可能组合太多,从而导致计算效率非常低。最早想到的较可行的方法是采取增量式计算策略^[22],可有效避免一些不必要的计算环节。随后,并行和集成思想被应用于增量式构造概念格^[23–24],从而大幅提高建格效率。相比盲目构建整个概念格,实际应用驱动的概念格研究通常只涉及部分概念节点,此时通过有针对性地寻找目标概念能有效简化问题的求解过程。

其次,为了更好地进行数据分析和节省存储空间,有必要对概念格进行约简。一般地,约简概念格存在3种方式:对象约简、属性约简和概念约简。相比属性约简和概念约简,对象约简的研究较少,也未引起足够的重视。属性约简(又称特征选择)最通用的研究方法是保持概念格结构不变,消除冗余属性^[25]。也就是说,此类属性约简的前提是先建立概念格,这通常意味着涉及庞大的计算量。另一种受欢迎的属性约简方式是粒约简^[26]。注意,虽然实现属性约简也可通过其它方式(如可约属性策略^[6]),但是如果最终输出结果为简化概念格,即便一开始不建格就直接在数据层面进行约简,最终还是要构建简化概念格。因此,至于是先约简属性再构建概念格,还是先构建概念格再进行属性约简,目前仍没有专门的讨论。相比属性约简,概念约简的研究模型较多,可通过删减数据间接减少概念数目^[6],也可按某种方式直接对已得到的概念节点进行删减^[27]。需

要指出的是,删减概念本身不是目的,重要的是实施删减是为了达到某种实际需要,避免为了纯粹减少概念节点而删减概念。

再者,概念格的节点之间可以进行相互推理,在此基础上能够实现规则提取,它被认为是概念内涵之间的一种诱导关系^[28-30]。在形式概念分析中,更为一般的规则是蕴涵^[6],它刻画属性之间的依赖关系。实际上,概念内涵之间的诱导关系可看作蕴涵的一种特殊情形。无论是建立在概念格基础上的规则提取,还是不依赖于概念格直接对形式背景进行蕴涵挖掘,其优点是分类精度较高,但计算量都非常庞大,无法有效满足客户的需求。因此,基于概念格的规则提取的研究工作的瓶颈问题是如何大幅提高计算效率。

另外,为了避免正面计算整个概念格而付出庞大的计算代价,一种可行的研究思路是将概念格替换为概念知识空间^[31]。概念知识空间是指若干概念节点组成的知识空间^[32],它的元素通常只是来源于概念格的部分节点,当然理论上在最坏的情况下也可能等于整个概念格。实际上,利用概念知识空间替代概念格的优点是多重的:1)可大幅降低计算量;2)概念知识空间的演化灵活简便,更好地满足客户的诸多需求^[33-34]。例如,在分类任务中,如果直接使用整个概念格,总体效果通常不理想,耗时巨大。需要指出的是,使用整个概念格进行分类有时是不必要的,因为现有的研究已表明:概念格中有些节点对分类任务实际上不起作用^[31,33-34],甚至还可能产生负面影响,即对分类结果产生干扰。此外,出于节省计算量考虑,从概念格中筛选对分类结果有积极贡献的概念节点较困难,原因是子空间选择同样耗时。然而,通过概念知识空间的高效演化获得对分类结果有实质性贡献的概念节点却是可行的。通常,概念知识空间如何能有效替代概念格与具体的问题背景密切相关,目前通用的研究方法是具体问题具体分析。

最后,概念格的发展离不开粒计算思想^[26,35-40]。特别地,近年来提出的多粒度形式概念分析理论受到广泛关注。另外,概念本身也是粒,如何通过粒描述对概念进行认知是一个有意义的研究课题。粒描述是知识粒化的核心概念^[41],可以为知识如何有效进行粒化提供依据,找到合适的粒度空间解决实际问题^[42-44]。实际上,概念格与粒描述的研究是相互促进的,概念格可以为粒描述提供研究对象,粒描述可以加深人们对概念格的理解与认识,从而有助于概念格的应用。

总之,概念格的研究涵盖多方面的内容,主要工作包括概念格模型推广、概念格构造、概念格约简、基于概念格的规则提取、概念知识空间、概念格的粒计算方法、概念格应用等。

1 概念格的主要研究内容与进展

为了讨论方便,本文使用 U 表示对象集, A 表示属性集, I 表示对象集与属性集之间的布尔关系。此时,一个形式背景可表示为三元组 (U, A, I) 。将一个对象 x 拥有一个属性 a 记为 $(x, a) \in I$, D 表示决策属性, J 表示对象集与决策属性集之间的布尔关系,通过形式背景 (U, A, I) 与 (U, D, J) 的并置可得到一个决策形式背景 (U, A, I, D, J) ^[28]。实际上,决策形式背景与训练背景在语义上等价^[45]。

1.1 概念格模型的推广

由于概念格是概念配分泛化-特化关系生成的,所以概念格模型的推广在本质上是对概念进行扩展。Wille^[1] 基于形式背景 (U, A, I) 提出形式概念 (X, B) ,其中对象子集 $X \subseteq U$ 为外延,属性子集 $B \subseteq A$ 为内涵。形式概念 (X, B) 为反序 Galois 连接 f 和 g 的不动点,即

$$f(X) = \{a \in A : \forall x \in X, (x, a) \in I\} = B,$$

$$g(B) = \{x \in U : \forall a \in B, (x, a) \in I\} = X.$$

也就是说:若一个对象属于概念 (X, B) ,则它必拥有内涵 B 中的每个属性;同理,如果一个属性属于概念 (X, B) ,那么它必被外延 X 中的每个对象拥有。

在现实中,一个对象是否属于某一概念可能是不确定或不肯定的。为此,Burusco 等^[14] 借助 L 完备格上的补运算 $(\cdot)'$ 和 T 模在 L 模糊背景 (L, U, A, \tilde{I}) 中引入 L 模糊概念 (\tilde{X}, \tilde{B}) ,其中模糊集 $\tilde{X} \in L^U$ 为外延,模糊集 $\tilde{B} \in L^A$ 为内涵, L^U 表示对象集 U 上的所有 L 模糊集, L^A 表示属性集 A 上的所有 L 模糊集。具体地,

$$\tilde{X}^*(a) = \inf_{x \in U} \left\{ \tilde{X}'(x) T \tilde{I}(x, a) \right\} = \tilde{B}(a),$$

$$\tilde{B}^*(x) = \inf_{a \in A} \left\{ \tilde{B}'(a) T \tilde{I}(x, a) \right\} = \tilde{X}(x).$$

受此启发,范世青等^[46] 将 L 完备格上的补运算 $(\cdot)'$ 和 T 模替换成伴随对 (\otimes, \rightarrow) ,重新讨论 4 种 L 模糊概念,其中 2 种来源于文献[15] 和文献[47]。Belohlávek 等^[15] 提出的 L 模糊概念的影响较大,具体模型如下:

$$\widetilde{X}^{\uparrow}(a) = \inf_{x \in U} \left\{ \widetilde{X}(x) \rightarrow \widetilde{I}(x, a) \right\} = \widetilde{B}(a),$$

$$\widetilde{B}^{\downarrow}(x) = \inf_{a \in A} \left\{ \widetilde{B}(a) \rightarrow \widetilde{I}(x, a) \right\} = \widetilde{X}(x).$$

杨丽等^[48]又将 L 完备格扩展到格蕴涵代数, 利用格蕴涵代数上的蕴涵算子研究格值模糊概念。此外, Medina 等^[49]在多伴随环境下进一步推广模糊概念格。注意到概念外延和内涵均为模糊集的情况太复杂, 得到的模糊概念数目较多, 从而大幅削弱其实用性。为了简化模糊概念, 采用模糊截集的思想考虑外延或内涵不模糊的单边模糊概念格^[50-54]。至此, 从经典形式概念到模糊概念的跨度研究形成一个渐进的过程。

经典的形式概念只适用于完备背景, 然而现实中数据出现缺失或不确定不可避免, 得不到精确概念也是很正常的现象。为此, Djouadi 等^[20]基于数据近似评估思想, 提出不完全可知概念。Li 等^[55]借助外延上下近似算子, 又给出近似概念的定义, 将属性集的序对作为概念的内涵。在此基础上, Yao 等^[56]利用区间集系统研究不完备形式背景的部分已知概念, 区分为 3 种类型: 外延为区间集、内涵为经典集, 外延为经典集、内涵为区间集, 外延和内涵均为区间集。

另一个较受欢迎的概念格扩展模型为粗糙概念格。顾名思义, 它是将粗糙集上下近似思想引入概念诱导算子中重新定义概念。以面向对象概念^[16]和面向属性概念^[17]为例, 涉及一个必然算子 $(\cdot)^{\#}$ 和一个可能算子 $(\cdot)^{\diamond}$, 其中 $(\cdot)^{\#}$ 表示拥有对象(或属性)肯定包含于原象的属性(或对象)组成的集合, 而 $(\cdot)^{\diamond}$ 表示拥有对象(或属性)可能包含于原象的属性(或对象)组成的集合。此处, 肯定和可能的语义分别与粗糙集中上下近似的语义一致。若 $X^{\#} = B$, $B^{\diamond} = X$, 称 (X, B) 为面向对象概念^[16]; 若 $X^{\diamond} = B$, $B^{\#} = X$, 称 (X, B) 为面向属性概念^[17]。不同于经典的概念诱导算子, 必然算子 $(\cdot)^{\#}$ 和可能算子 $(\cdot)^{\diamond}$ 满足保序 Galois 连接, 这方面更多对比分析见文献[13]。

近年来, 较热门的概念格扩展模型为三支概念格^[18], 它的核心思想是信息的一致性。也就是说, 通过一致拥有和一致不拥有可将研究对象划分为三个彼此不相交的部分, 其中一致拥有和一致不拥有的对立面部分一致拥有被视为边界域。注意, 信息不一致产生的边界域是专家意见相左的一种具体表现, 即决策信息产生冲突。这种现象与不完备形式背景获取的部分已知概念完全不同, 尽管在概念的表现

形式上两者貌似有一定的相似性, 因为它们都采用集合序对的方式进行知识描述。此外, 三支概念格与经典概念格之间可相互转化, 这意味着三支概念格可促进经典概念格的进一步研究, 反之亦然。

除了上述常见的概念之外, 还有一些较抽象的概念模型, 例如: 三元概念^[19]、单调概念^[57]、AFS(Axiomatic Fuzzy Set)概念^[58]、模糊三支概念^[59]、实值概念^[21]、概念模式^[60]。实际上, 三元概念是将经典概念从二维空间推广至三维空间, 增加条件空间, 能描述在一定条件下一个对象与一个属性之间是否存在拥有关系。单调概念是把概念内涵扩展至复合逻辑析取-合取式, 而 AFS 概念是通过逻辑式等价关系有效克服单调概念可能出现的外延与内涵之间不一一对应的问题。模糊三支概念是考虑 L 模糊背景及其补背景的模糊概念诱导算子。实值概念允许内涵为任意实数集的向量, 而概念模式的内涵是任意值的描述向量。

1.2 概念格构造

由于概念格自身的原因, 构造时间与规模呈爆炸式增长, 所以如何提高概念格构造效率是形式概念分析理论中的重要课题。下面分别从经典概念格构造、模糊概念格构造、iceberg 概念格构造及概念三元格构造四方面介绍该方向的研究进展情况。

1.2.1 经典概念格构造

经典概念格构造算法从最初只生成节点的枚举法 NextClosure^[6]、CbO(Close-by-One)^[61], 到后来可同时生成格结构的方法: Bordat^[62]、Nourine^[63]、Lindig^[64], 及以 Godin^[22]为代表的渐增式构造算法。在 2000 年左右, Valtchev 等^[23,65]开发集成构造算法。此类方法实际上是泛化渐增式构造算法的结果。至此, 概念格构造的主流方法已基本形成, 分别是批处理算法、渐进式构造算法和集成构造方法。需要指出的是, 这些方法也是构建扩展概念格的主要思想。后续其它概念格构造算法均能找到上述主流方法的影子, 如批处理 Choi^[66]、渐增式 AddIntent^[67], In-Close^[68]等。

并行计算作为算法加速的一种重要方式, 在概念格构造研究中得到重视, 即利用并行计算技术可以对现有的各种串行概念格构造算法进行加速。Njiwoua 等^[69]对 Bordat 进行并行化改造, 大幅降低概念格构造的计算代价。类似地, Fu 等^[24]也对 NextClosure 进行并行化处理。受此启发, Francois 等^[70]又改进概念格并置集成构造算法。此外, Krajca 等^[71]基于字典序实现形式概念的并行快速计算, 它的思想与 NextClosure 较相似。

随着经典概念格构造思想的日趋完善,2010年以后的研究思路并未取得实质性的进展,但仍有一些新意。Outrata 等^[72]借助正则性检验方法实现 CbO 的完善升级。Outrata^[73]研究 CbO 的改进算法。Muangprathub^[74]开发快速生成概念格的新技术。值得一提的是,Amrane 等^[75]受 Web 服务动态环境应用的启发,也提出概念格构造思想。

国内关于概念格构造的研究成果也较丰富。齐红等^[76]借助搜索空间划分实现稀疏数据的概念批处理快速计算。张继福等^[77]和杜秋香等^[78]分别考虑约束概念格生成及通过概念特化增量形成概念格。董辉等^[79]采取闭包系统划分,也实现概念格的并行计算。智慧来等^[80]和 Zhi 等^[81]又分别讨论概念格合并及概念与蕴涵规则的快速更新问题。近年来,姜琴等^[82]研究如何渐进式同步消减属性。张涛等^[83]通过属性拓扑提出概念并行计算新思路。另外,蔡勇等^[84]给出 MapReduce 框架下的概念格并行构造算法。

1.2.2 模糊概念格构造

根据 1.1 节的讨论,由经典概念扩展到模糊概念的技术路线不止一种,学者们提出不同的研究视角^[85~86],大致可分为如下两类^[87]。

1) 基于阈值裁截法的模糊概念格构造。方法的核心思想是利用已知阈值控制对象和属性受概念诱导算子的影响程度^[88~90]。它的优点是实现数据离散化的目的,使模糊形式背景的连续数据产生的外延或内涵是经典集的单边模糊概念。Tho 等^[88]和 de Maio 等^[90]利用这个研究思路解决模糊本体的构造问题。不仅如此,刘宗田等^[91]借助两个阈值控制模糊形式背景中数据之间进行作用的范围,辅助获得理想的模糊概念格渐进式构造算法。另外,许佳卿等^[89]基于模糊概念格的阈值裁截法分析软件系统,效果较满意。

2) 基于模糊逻辑的模糊概念格构造。众所周知,Bělohlávek 长期从事模糊概念格的相关研究工作,其特点是追求性质较好的模糊概念诱导算子,提出一些满足经典概念格性质的数学模型^[92],产生较大的影响力。但是,此类模糊概念格模型非常复杂,其后也未提出高效的生成算法。Bělohlávek 等^[93]借助 NextClosure 生成 L-模糊概念,但忽略格结构的形成。Bělohlávek^[94]通过 Lindig 类似生成 L-模糊概念格。另外,Bělohlávek 等^[95~96]为了克服计算效率低下的困难,又基于相似度方法挖掘因子模糊概念,然而离生成完备 L-模糊概念格仍有差距。为此,张卓等^[97]改进 FuzzyNextClosure^[93],开发并行批量生成

模糊概念的方法。此后又受负载均衡技术的启发提出并行计算思想^[98],它的优势是可高效处理稀疏数据的模糊概念并行构造问题。近年来,学者们注意到模糊 Galois 连接的闭包计算是导致建格代价迅速增大的主要原因,在 FuzzyLattices^[94] 和 Choi^[66] 的基础上又得到批处理构造模糊概念格的简易算法^[99],算法特点是可有效避免繁琐的闭包运算,不失为降低构造模糊概念格计算量的一种方法。

1.2.3 iceberg 概念格构造

关于 iceberg 概念格构造问题,Stumme 等^[27]给出批处理生成 iceberg 概念格的方法。Rouane 等^[100]从对象角度提出 iceberg 概念格渐进式更新策略。与文献[100]有所不同,Nehmé 等^[101]从属性角度实现 iceberg 概念格构造。不仅如此,Zaki 等^[102]借助闭频项集生成思想重新讨论 iceberg 概念格构造问题。Hu 等^[103]通过改进后的 Godin^[22]研究 iceberg 概念格获取问题。王黎明等^[104]采用并置集成的方法,开发 iceberg 概念格构造算法,应用于闭频项集挖掘领域。柴玉梅等^[105]又利用频繁概念直乘分布,考虑 iceberg 概念格分布式构造问题。另外,La 等^[106]联合 CHARM-L(Closed Association Rule Mining for Generating Lattice)^[102] 和 CLICI(Concept Lattice Based Incremental Closed Itemset)^[107],实现 iceberg 概念格的渐增式生成。Kovács 等^[108]利用数据约简思想探讨 iceberg 概念格的构造。

针对数据挖掘相关任务,并未在这里列出因具体应用而驱动的 iceberg 概念格构造工作。

1.2.4 概念三元格构造

Lehmann 等^[19]为了将概念的语义更逼近现实环境中的原型,进一步扩展形式概念的维数,提出三元数据的概念分析理论。随后,Wille^[109]给出三元概念分析的基本定理。起初,三元概念分析并未引起同行的广泛关注,再加上该理论过于复杂抽象,不满足经典概念格的某些性质,因此很少有人继续跟进这个研究方向。然而,随着高维数据越来越得到重视,自然三维数据也不例外,三元概念分析逐渐引起学者们的关注。Osicka^[110]讨论概念三元格的构造问题。Bělohlávek 等^[111~112]基于分级属性研究概念三元格,并揭示三元模糊 Galois 连接和经典 Galois 连接之间的内在联系。近年来,国内学者也开始关注三元概念分析。魏玲等^[113]对三元概念分析的研究工作进行综述。汤亚强等^[114]给出三元概念的认知模型。王冰洁等^[115]提出构造概念三元格的渐进式生成算法。王霞等^[116]利用对象条件三元概念生成三元背景的所有三元概念。更多关于三元概念分析的介绍

见文献[117].

1.3 概念格约简

众所周知,约简通常是指在保持某种特定性质或要求的情况下消除数据或知识的冗余.概念格约简也不例外,它是在保持特定信息不变的前提下避免对象、属性或概念知识的冗余.相应地,概念格约简有三种方式:对象约简、属性约简和概念约简.相对而言对象约简受关注较少^[6,50,118-119].下面主要介绍属性约简和概念约简的研究进展.实际上,属性约简是一个保持形式背景或概念格某种特性不发生改变以计算属性全集的极小子集的过程,而概念约简是保持某种需求得到满足的情况下求解所有概念的最小子集的过程.

1.3.1 属性约简的研究现状

属性约简是概念格研究领域中的一个热点问题,张文修等^[25]提出的概念格属性约简理论与方法是该研究方向开创性工作.概念格属性约简是在形式背景的对象集不发生改变时计算极小属性子集,使约简后的形式背景生成的概念格与原始数据生成的概念格同构^[25,120].具体地,对于形式背景 (U, A, I) ,记 $\partial(U, A, I)$ 为 (U, A, I) 的概念格,

$$\partial_U(U, A, I) = \{X : (X, B) \in \partial(U, A, I)\}$$

为概念格所有节点外延组成的集合.若存在 $E \subseteq A$,使

$$\partial_U(U, A, I) = \partial_U(U, E, I_E),$$

则称 E 为形式背景 (U, A, I) 的协调集.进一步,如果

$$\forall a \in E, \partial_U(U, A, I) \neq \partial_U(U, E - \{a\}, I_{E-\{a\}}),$$

称 E 为 (U, A, I) 的约简.换言之,约简是极小的协调集.该理论主要涉及如下四方面内容:

- 1) 协调集与约简的定义及判定定理;
- 2) 利用辨识矩阵计算约简;
- 3) 属性分类(核心属性、相对必要属性、绝对不必要属性)及不同类型属性的特征分析;
- 4) 属性特征与约简之间的关系.

张文修等^[25]和魏玲^[120]围绕上述问题给出一整套分析理论,研究思路已成为概念格属性约简的主流模式.

需要指出的是,在此之前,Ganter 等^[6]在形式背景中已考虑属性约简问题,主要是在不影响概念格结构的前提下避免对象和属性的冗余,但是未深入开展研究,只进行简单分析,也未提出系统性的研究理论或方法.从这个意义上讲,张文修等^[25]和魏玲^[120]的贡献是给出属性约简的研究理论与方法.

此外,Wang 等^[121]给出保持交不可约元外延集

不变的属性约简方法.Wu 等^[26]借助粒计算思想研究粒约简问题,即求解属性全集的极小子集,使子背景与原形式背景的粒概念外延对应相等.Mi 等^[122]基于轴对称伽罗瓦连接(Axialities)重新考虑概念格属性约简问题.Li 等^[123]又提出保持并不可约元外延集不变的属性约简方法.注意,这些属性约简的语义是不同的,也就是措辞上相同但内涵不同.因此,必要时如需要特指某一种属性约简方法,应适当添加定语以作区分.例如,张文修等^[25]提出的属性约简方法,通常被称为保持概念格结构不变的属性约简.

此后,学者们又将完备形式背景的属性约简方法进行扩展,讨论其它类型的形式背景或概念格属性约简问题.例如,魏玲等^[124]将该方法推广到决策形式背景研究条件属性约简问题,定义强弱协调性,满足不同的决策需求.Li 等^[29-30,55,125-126]在保持决策规则的决策能力不发生改变的情况下,讨论如何对各种类型的决策形式背景的条件属性进行约简.Shao 等^[127]研究广义单边形式背景的属性约简.王振等^[128-129]借助区间集概念格,给出不完备形式背景的属性约简方法.Li 等^[52]把 Lukasiewicz 算子替换为 t 蕴涵,改进 Elloumi 等^[50]提出的模糊概念格模型,并得到相应的属性约简方法.Liu 等^[130]基于面向对象概念格和面向属性概念格,通过辨识矩阵计算形式背景的所有约简.Qin 等^[131]将其进一步推广到决策形式背景.Zou 等^[132]考虑语言值概念形式背景的知识约简问题.Cornejo 等^[133]分析多伴随概念格的属性约简.不仅如此,Ren 等^[134]在三支概念分析^[18,135]的框架下,利用形式背景的对象导出概念格,研究保持格结构、交(并)不可约元、粒概念不变的四种属性约简及它们之间的内在联系.Li 等^[136]将 Li 等^[55]提出的近似概念进一步扩展成三支近似概念,也研究属性约简问题.

上述针对不同问题背景,从不同角度给出的保持某一特定要求不变的属性约简方法丰富经典的形式概念分析约简理论,受到同行的广泛关注,也激起人们对约简内涵的深入思考.总之,属性约简的一般性描述可概括如下:对于形式背景 (U, A, I) ,设 $\phi(U, A, I)$ 为客户要求的信息刻画,若存在 $E \subseteq A$,使

$$\phi(U, A, I) = \phi(U, E, I_E),$$

则称 E 为 (U, A, I) 保持 ϕ 信息的协调集.进一步,如果

$$\forall a \in E, \phi(U, A, I) \neq \phi(U, E - \{a\}, I_{E-\{a\}}),$$

称 E 为 (U, A, I) 保持 ϕ 信息的约简.

1.3.2 概念约简的研究现状

实际上,相对对象约简和属性约简,概念约简则是综合考虑如何避免对象与属性的冗余问题.

概念格的构建是一个 NP-hard 问题,极大制约形式概念分析理论的进一步发展.究其原因是建立格结构太耗时,如果能在不建格的情况下也能反映原始形式背景的全部信息或知识,将大幅减少概念知识挖掘的计算代价.这是概念约简研究的初衷之一.

曹丽等^[137]在保持二元关系不变的前提下建立概念约简理论.类似于经典概念格属性约简,讨论如下问题:1)提出概念协调集和约简,给出相应的判断性质;2)依据功能和作用的不同,将全体概念区分为3类(核心概念、相对必要概念、绝对不必要概念),并从二元关系的角度对它们进行了刻画.具体地,记 $\partial(U, A, I)$ 为形式背景 (U, A, I) 的概念格, $\Omega \subseteq \partial(U, A, I)$,若

$$I = \bigcup_{(X, B) \in \Omega} X \times B,$$

则称 Ω 为保持二元关系不变的概念协调集.进一步,如果对

$$\forall (X, B) \in \Omega, \\ \Omega' = \Omega - \{(X, B)\}, I \neq \bigcup_{(X, B) \in \Omega'} X \times B,$$

称 Ω 为保持二元关系不变的概念约简.

事实上,上述概念约简方法与布尔因子分析密切相关.后者的主要思想是将一个布尔矩阵 $I_{m \times n}$ 分解成2个规模较小的布尔矩阵 $P_{m \times k}$ 与 $Q_{k \times n}$,并尽可能使变量 k 最小化.这与形式概念是布尔矩阵中数字全为1的极大填充块(布尔矩阵的一部分)有密切关系.也就是说,形式概念与布尔因子分析中的因子具有某种对应关系,可以用形式概念讨论布尔因子分析的有关问题^[138],甚至有时能取得较好的分析效果^[139],更多讨论参见文献[119]、文献[140]和文献[141].反之,也可利用布尔因子分析中的因子研究形式概念,当然也包括概念约简理论.

进一步,魏玲等^[142]基于概念辨识矩阵,给出计算所有概念约简的方法.谢小贤等^[143]通过关系矩阵运算生成所有概念约简.需要指出的是,除了保持二元关系不变的概念约简之外,还有其它方式研究概念约简.例如,Stumme等^[27]从全体概念中选取客户感兴趣的一部分概念.

1.4 基于概念格的规则提取

If-Then 规则是知识表示的主要形式,不同的领域从不同角度对其展开深入、广泛的研究,并且习惯

称呼也不一样.在数据库领域,If-Then 规则被称为属性依赖^[144];在数据挖掘领域,If-Then 规则被称为关联规则^[145];在形式概念分析理论中,If-Then 规则被称为蕴涵^[6].具体地,在形式概念分析中对 If-Then 规则的研究主要围绕如何发现蕴涵规则进行探讨^[6, 146-150].例如,Missaoui 等^[146]基于概念格给出近似蕴涵获取方法.王志海等^[147]利用增量式建格实现规则动态提取.谢志鹏等^[148]借助概念格与内涵缩减技术,讨论关联规则发现.胡可云等^[149]改造Bordat,在此基础上通过概念格完成关联规则与分类规则的双重挖掘任务.梁吉业等^[150]给出闭项集概念,据此只需提取核心规则,基于规则推理诱导形成剩余规则,从而有效避免大规模冗余规则的生成.

实际上,已有研究^[147, 149, 151]表明,基于概念格挖掘得到的蕴涵规则在分类效果上一般不亚于其它分类器,但是元素个数庞大的规则集通常不符合用户的需求,很难得到用户的青睐.与该问题相关的研究工作主要围绕蕴涵的完备性和无冗余性展开探究.例如,Maier^[144]分析蕴涵的语义和语构特征,揭示各种蕴涵基之间的关联.相比其它蕴涵基,Duquenne 等^[152]提出的蕴涵基包含最少的规则个数,被称为自然基.它的计算代价基本上是一个 NP-hard 问题^[153-154],一般需要借助伪内涵进行求解,即它的求解过程非常繁琐,在实际应用中缺乏计算优势.此外,Qu 等^[155]和马垣等^[156]还考虑其它类型的蕴涵基,实际上不同的蕴涵基与使用的推理规则密切相关,在此不再展开介绍.总之,有关蕴涵的完备性和无冗余性的理论研究已取得阶段性成果,但其计算效率仍有待深入分析.其实,这方面已出现一些较好的工作可供借鉴,如关联规则^[148-149, 157-159]和决策树^[160]的研究思路就较新颖.

另外,还可在决策形式背景下讨论蕴涵的特殊形式,即前提来源于条件属性,结论来源于决策属性,相当于对蕴涵的前提和结论的构成进一步做出限制,这种特殊的蕴涵称为决策蕴涵^[161].类似地,为了研究决策蕴涵的完备性和无冗余性,Qu 等^[161]提出 α 推理规则,以便将前提较强或结论较弱的决策蕴涵进行删减,有效避免冗余规则的生成,在此基础上借助最小生成子^[162]得到决策形式背景的所有决策蕴涵.不仅如此,为了实现保持决策能力不变的知识约简,Li 等^[29-30, 55, 118, 125-126, 163]分别在经典、不完备、实值的决策形式背景中重新探讨类似于蕴涵推理的决策规则冗余问题.需要指出的是,虽然这些特殊的蕴涵均基于 α 推理规则实现,但是它们的出发点并不同.更多有关决策形式背景规则提取的研究

可参见文献[164]~文献[166].

众所周知,蕴涵的冗余性是相对的,它与所使用的推理规则密切相关,即冗余性问题必须指明是在什么样的推理规则框架下进行讨论.那么自然引出一个问题:在决策形式背景中基于 α 推理规则实现的决策蕴涵无冗余化是否已非常满意?这个问题取决于其研究目的到底是什么,如果只是纯粹的讨论非冗余决策蕴涵数目的话,一般而言是推理规则越多或越强生成的非冗余决策蕴涵数目越少.为此,文献[167]~文献[169]从逻辑角度重新研究决策蕴涵,一些关键的结论归纳如下:

1) α 推理规则得到的极大决策蕴涵集是完备的,但不是非冗余的,即能诱导其它决策蕴涵,却不能保证元素无冗余.

2) α 推理规则进一步合并其它推理规则,能产生完备且非冗余的决策蕴涵集.

3) 完备且非冗余的最优决策蕴涵集称为决策蕴涵规范基,这是一个理想的决策蕴涵集,因为相对于其它完备决策蕴涵集,它包含最少的元素个数.

4) α 极大决策蕴涵集在抑制冗余决策蕴涵的生成方面效果不佳,而决策蕴涵规范基在很多数据集上进行测试的结果已表明抑制冗余规则生成的效果显著,甚至有效抑制率超过90%.

虽然文献[168]、文献[169]清楚揭示推理规则与决策蕴涵规范基之间的关系,但要实现其计算仍得依靠最小生成子,这又意味着庞大的计算量.因此,Li等^[170]利用真前提重新设计决策蕴涵规范基的生成算法.沿着这个思路,Zhai等^[171]又讨论不精确条件下的可变决策蕴涵,通过V-contraction、Combination和Empty三条推理规则保证可变决策蕴涵的完备性,并且相关结论也适用于不协调决策形式背景^[161].进一步地,Zhai等^[172-174]和Bělohlávek等^[175]在模糊环境下还研究模糊蕴涵规则及其完备性.

1.5 概念知识空间

概念格的部分节点组成的集合称为概念知识空间,包含所有节点或不包括任何节点属于概念知识空间的两种极端情况.一般地,研究概念知识空间主要是指包含概念格的节点个数明显少于整个概念格规模的情形,原因是接近整个概念格规模的概念知识空间对于提高拟解决问题的计算效率益处不大.概念知识空间研究的首要任务是如何确定它的组成部分,这依赖于拟解决问题的研究背景或研究目的,如寻找静态数据的概念格的一组生成基,那么对象概念或属性概念均可视为概念知识空间,因为都可

由该概念知识空间诱导生成剩余概念.其次,根据问题需要,可以对概念知识空间做出必要的更新,如动态数据的概念格一组生成基,可选择对已得到的概念知识空间进行更新获得.实际上,概念知识空间的思想在形式概念分析中一直都存在,如概念格的不可约元^[6],只是从来未被当作一个重要问题单独提出来而已.

注意:概念知识空间的研究目的通常不是在问题求解精度与计算代价之间寻找某种平衡,而是拟解决问题本身就不必要涉及整个概念格;否则,它就等价于概念子空间选择问题,这不在本文的讨论范围之内.不仅如此,有时基于概念知识空间求解问题甚至比使用整个概念格更有效,原因是过多的概念节点有可能对问题求解结果造成一定的干扰而形成一些负面影响.例如,删除造成分类冲突的概念节点往往可提高分类精度.

近年来,概念知识空间的思想在概念认知学习领域中得到广泛关注,取得一些有价值的研究成果,主要体现在如下两方面:1) 粒概念形成的概念知识空间在概念认知学习中可完成概念学习任务^[32];2) 通过粒概念形成的概念知识空间设计的增量学习分类算法能取得较好的分类性能^[34].

对于1),它的核心原理是粒概念形成的概念知识空间与整个概念格具有相同的概念学习能力,具体地,在概念知识空间中进行线索的上下近似,求得的充分必要概念与整个概念格得出的计算结果相同,这一结论在近似环境下也是成立的^[176].此外,概念知识空间的演化实施起来较方便,主要运算只是信息融合算子的不断迭代,求解过程可拆分性较强,容易实施并行计算技术^[177],有关结论进一步被推广到大规模多源数据集上^[178-180].并行思想主要包括初始阶段的概念知识空间的并行化计算,以及认知阶段对概念知识空间的认知结果进行集成融合.

对于2)的增量学习分类算法,它的核心思想是粒概念形成的概念知识空间可通过样本标签进行聚类,得到与标签关联的概念知识子空间,在增量学习过程中这些概念知识子空间不断进行更新以增强预测概念与训练概念之间的匹配强度,从而提高分类精度.具体地,首先将规范决策形式背景的决策属性视作样本标签,具有相同标签的样本对应的条件粒概念聚为一类,得到条件粒概念形成的概念知识空间的初始聚类结果,即条件粒概念形成的概念知识空间被划分为若干概念知识子空间,这些概念知识子空间与具体的标签关联.其次,当新样本到来时,

如果它携带标签信息,那么凭借标签信息即可快速锁定新样本归为哪个概念知识子空间,并对其原有概念进行更新,否则利用概念之间的相似性判断新样本应归为哪个概念知识子空间,以确定新样本的预测标签,并对原有概念进行更新。类似地,无论是初始概念知识空间或概念知识子空间的更新,还是增量学习过程中概念知识子空间的更新,都可方便设计成并行模式进行计算^[177],从而大幅提高计算效率。

解决以上两个问题均无需涉及整个概念格,仅通过概念知识空间就可有效求解问题。特别地,利用整个概念格还有可能得不到满意的分类性能,因为有些概念节点信息会对样本分类造成一定的干扰,从而导致误分类率增大。另外,通过粒概念形成的概念知识空间设计的增量学习分类算法被进一步推广到模糊环境中^[34],也取得较优的分类效果,运行效率较高。最后,需要强调的是,在实际应用中概念知识空间如何确定应依据具体问题进行具体分析^[181]。

1.6 概念格的粒计算方法

李金海等^[40]详细讨论形式概念分析的粒计算方法,有兴趣的读者可自行查阅。为了避免重复论述,下面仅介绍多粒度形式概念分析与基于概念格的粒描述问题。

近年来,多粒度形式概念分析受到人们的广泛关注,它的研究背景为:在数据粒化过程中,一开始不确定解决问题的合适粒度层,会将大量的知识空间均视为潜在的研究对象,这些知识空间之间有时是可比的,也可以相互转化,所以有必要讨论不同知识空间对寻找拟解决问题的最优解的具体影响。目前,主要有两种研究视角:多粒度标记方法^[182-184]和属性粒化思想^[185-187]。实际上,一些学者最初讨论多粒度标记概念格主要是借助于多粒度标记信息系统进行转化得到的^[188-189],但是这种研究方式没有完全摆脱粗糙集研究方法的一些束缚,会给习惯于形式概念分析思维的读者在理解上造成一定困难,因为它事先需要对数据进行预处理,即通过尺度化方法将多粒度标记信息系统转化成一系列的形式背景。受此启发,李金海等^[182]利用多个形式背景的并置重新描述多粒度形式背景,使多粒度形式概念分析理论完全建立在经典的形式背景之上,不涉及任何的数据预处理。此外,为了解决多粒度形式背景因多个背景的并置表示而引起的数据分布描述问题,李金海等^[183]提出数据跨粒度层组合的多粒度形式概念分析方法。在此基础上,李金海等^[184]又将单粒

度类属性块扩展到多粒度类属性块,既能够对类属性块内部信息进行跨粒度组合,又可以对类属性块之间的知识进行跨粒度组合,完善基于多粒度形式概念分析的多层次知识发现理论与方法。

多粒度形式概念分析的另一个研究思路是属性粒化^[185],它的前提条件是假设属性值之间存在粗细关系。在此基础上,一个粗的属性可分成若干个细的属性,反之几个细的属性也可合并得到一个粗的属性,那么属性值就可在粒度粗细意义下进行重组以生成新的属性。此时,从中选出一部分属性进行组合,均可得到形式背景。如果看问题的视角仍为所有属性,那么上述操作实际上就形成数目众多的形式背景,称为多粒度形式背景。She 等^[186]和 Shao 等^[187]通过属性粒化研究面向对象概念和面向属性概念在粒度粗细之间如何进行相互转化,并给出相应的实现算法。

众所周知,粒描述是粒计算研究中的基本问题,它的主要目的是针对任一目标粒找到一个合适的描述或刻画,这里“合适”的标准可由客户指定,也可在理论上进行探讨:一般是指表现形式简单、描述简短、易于理解的复合命题公式。若能找到一个描述公式,使其对应的对象(也可理解为满足命题的对象)恰好等于目标粒,那么该目标粒是可精确描述的^[41,190],或称可定义的^[191];否则,目标粒只能被近似描述。

目前,概念格为粒描述提供一种研究方法^[41]。它的基本思路如下:如果目标粒是概念的外延,可通过概念的内涵或简化后的内涵描述目标粒;如果目标粒不是概念的外延,可利用两个概念的外延去近似目标粒,即通过两个概念的内涵或简化后的内涵对目标粒进行近似描述^[190,192-193]。一般地,仅借助于某一类概念格是很难满足实际需求的,原因之一是概念外延的个数一般少于对象幂集(潜在的目标粒)的元素个数,而目标粒可能来源于对象幂集的任一元素。另一个原因是特定概念格的内涵表示方式都较单一,不利于粒描述的多样化。为此,Zhi 等^[194]又利用近似三支概念格研究粒描述问题,丰富粒描述的表现形式。Yao^[191]基于粗糙集和概念格也考虑粒描述问题,它的核心概念是可定义粒,围绕可定义粒的性质又展开一系列分析与讨论。此外,Wan 等^[195]基于粒描述精度给出多粒度数据的最优粒度选择方法,它是粒描述方法的一个具体应用。

最后一个有趣的结论是,对于粒描述而言,概念格的节点个数越多,得到的粒描述精度越高^[192]。然而,概念格的节点个数越多,又意味着其计算代价

越大,所以这是一对相互矛盾的问题。另外,概念内涵的表现形式越丰富,得到的粒描述效果会越好,但是概念内涵越丰富通常又意味着概念格的节点越复杂,不便于理解,也很难构建起整个概念格,如单调概念^[57]和 AFS 概念^[58],这是另一对相互矛盾的问题。因此,粒描述是一个有意思的问题。

1.7 概念格应用

概念格理论与方法日渐成熟,在诸多领域中得到广泛应用^[7~11]。限于篇幅,下面仅选取 3 个较有特色的应用研究领域进行介绍,分别为本体构建与融合、知识表示与发现及推理、认知计算。

1.7.1 本体构建与融合

由于概念的形式化研究与形式逻辑中关于本体的描述较一致,所以将概念格与本体研究结合符合两者的发展需要,也具有某种必然性。实际上,概念格为本体研究提供扎实的理论基础:一方面概念节点清晰刻画对象与属性之间的对应关系,这是本体研究感兴趣的内容;另一方面,概念节点之间的多重继承和内隐关联为本体知识发现提供丰富的结构信息。不仅如此,概念格较成熟的构建算法和融合技术也为本体研究提供参考。例如,Stumme 等^[196]通过概念格设计自底而上的一种本体融合算法。Chen 等^[197]基于模糊概念格提出领域本体的融合方法。Zhao 等^[198]进一步利用粗糙概念分析讨论本体映射。Zhao 等^[199]借助概念格开展本体特性的生物医学匹配研究。朱佳等^[200]基于概念格开发煤矿事故本体构建技术。此外,概念格已发展多种扩展模型,可支撑复杂环境下的本体研究。如多维概念格适用于多维序列模式的增量挖掘^[201],为复杂地学领域的矿山生产本体构建提供参考依据^[202]。

1.7.2 知识表示、发现与推理

概念格的节点是知识表示的基本单元,Hasse 图又反映原始数据隐藏概念之间的传递关系与知识结构层次,即概念格本身就是知识表示与发现的一种有效工具。此外,基于概念格的规则挖掘也为知识推理提供方法和技术支撑,具有良好的应用前景。Nguyen 等^[8]基于形式概念分析讨论概念图表示问题,提出一整套分析理论。Tu 等^[9]通过形式概念分析给出基因数据的负关联挖掘方法。渠寒花等^[203]将寒潮气象灾害数据转化为多值形式背景以构建相应概念格,实现气象服务领域知识获取与表示,在此基础上利用概念知识结构的多维化得到寒潮灾害评价等级。覃丽珍等^[204]借助条件概念格和决策概念格诱导出的决策规则对高校就业数据进行相关性分析,获得学习过程与就业情况之间的若干关联。张

涛等^[205]通过形式概念分析和属性拓扑给出博客数据的社交网络研究方法,生成博客数据的知识网络,有利于挖掘博客数据潜藏的内在关联。Agon 等^[206]结合概念格与数学形态学,帮助初学者领悟音乐作品背后存在的结构模式,建立音乐结构分析的数学表示模型。Zhang 等^[207]从属性拓扑和形式概念分析的角度对临床数据的因果关系进行分析,在一定程度上揭示中医理论中证素间的转化关系。王慧等^[208]基于量化概念格设计频繁序列生成算法,相关技术成功应用于网络盗窃行为预测分析。Castellanos 等^[209]发现借助概念结构信息可提高聚类分析质量,有利于文档主题检测研究。

1.7.3 认知计算

概念格的节点形成方式和层次结构的构建模式与人类进行认知的过程相一致,可应用于认知计算领域,有助于完成特定知识的认知过程。由于 1.5 节总结概念认知学习中有关概念知识空间的研究工作,此处不再展开介绍。Hao 等^[210]利用形式概念分析的认知功能学习外部概念耦合关系和内部概念耦合关系,在此基础上充分利用文档各方面的信息,提高文档检索效率。Zhang 等^[211]通过属性拓扑和决策树研究增量式概念形成问题。王凯等^[212]借助于多层次概念格的结构信息对图像的语义进行认知分类,实现相关参数的动态学习,并建立具有较高分类精度的场景语义视觉模型。王亚平等^[213]将模糊概念格引入场景图像的视觉单词生成中,相比经典概念格,得到更高精度的场景分类效果。此外,还有其它从各个角度基于形式概念分析研究认知计算的工作,就不再一一介绍,有兴趣的读者可参见文献[214]~文献[220]。

最后,需要指出的是,上述介绍的研究内容只是概念格理论与方法中的一部分成果,还有一些研究工作未展开详细介绍,如从图论的角度如何快速计算概念格的各种约简^[221~222]、基于概念格的 Domain 理论分析^[223]、概念格及其扩展模型的冲突分析研究^[224]等。更多有关概念格的研究工作参见文献[225]和文献[226]。

2 概念格研究中存在的问题

为了与第 1 节保持一致,本节仍按概念格模型推广、概念格构造、概念格约简、基于概念格的规则提取、概念知识空间、概念格的粒计算方法、概念格应用的次序逐一讨论概念格研究中存在的一些关键问题。

2.1 概念格模型推广存在的问题

概念格模型推广是概念格研究与发展的必然要求。换言之,只有获得特定概念的研究对象,才能进一步考虑其它问题。目前,概念格模型推广主要基于构造性方法进行研究,它的优势是能直观描述清楚扩展概念的具体表现形式。然而,从数学的角度而言,还需要进一步讨论扩展概念的公理化描述方法,因为公理化可抽象扩展概念的原型,揭示其遵循的核心规律,有关工作属于理论上的重要创新。文献[32]、文献[176]、文献[227]~文献[231]初步探讨经典概念和近似概念的公理化,但绝大部分的扩展概念仍缺乏公理化结果。因此,扩展概念的公理化是一个具有挑战性的问题,有待今后进一步深入研究。

众所周知,经典概念格和模糊概念格的研究已较完善^[232-233]。不完备形式背景的部分已知概念由Yao^[56]通过区间集完全区分清楚,相关分析非常详尽^[234]。面向对象概念和面向属性概念随着粗糙集理论的不断完善也被分析透彻^[235]。然而,三支概念与三支决策的发展密切相关,各种问题还会不断涌现,那么三支概念发展取决于它对概念格和三支决策的实际贡献,为此今后应侧重研究三支概念与其它概念在理论和方法上的区分度、如何对三支决策进行延伸与扩展及基于三支概念建立特色研究方向。

此外,三元概念增加概念维数,进一步降低构造效率^[116],因此如何快速计算三维数据的所有三元概念是加速其实际应用的关键。需要指出的是,单调概念、AFS概念和实值概念由于内涵表现形式过于复杂,仅有少量工作继续跟进^[126,236],其关键是需要突破计算瓶颈问题。最后,概念模式在数学上将内涵推广到更一般的情况,可将很多工作视作特殊情况^[237],但这并不能说明它的优越性,因为这是一般模型与特殊模型之间的关系,不存在孰优孰劣的说法,也不存在哪个更重要的问题。除了现有概念存在上述问题之外,还有待继续提出实用性较强、特色鲜明的扩展概念,丰富现有的概念格模型。

2.2 概念格构造存在的问题

根据1.2节对概念格及其扩展模型的各种构造算法进行分析,不难得出如下特点。

1)技术驱动。依据结构信息的某些特性,设计合适、有效的技术路线构建概念格。考虑到经典概念格构建算法日趋完善,技术驱动的思想在经典概念格构造研究中表现得尤为突出,如字典序^[6,71]、格序^[62-64]、等价类^[23,65-66]、并行方法^[24,69-71,79,83-84]等。

这些技术在扩展概念格构建中依然频繁出现。此外,结构信息具备的某些特性有时也能激发技术路线。例如,在模糊概念格构建中,基于概念间的相似性阈值可挖掘模糊概念因子格^[95-96]。

2)计算模式驱动。目前概念格构造研究仍以串行计算方式为主,并行计算为辅。随着并行技术的不断发展,基于并行计算的概念格构造将会越来越流行^[83],特别在大规模数据的建格应用上表现突出^[84]。

3)应用驱动。概念格构造研究的初衷是为形式概念分析的广泛应用奠定算法基础。通常,实际任务的独特性和合适的构建技术之间进行有效搭配会催生各种各样的建格算法,如针对iceberg概念格提出的各种构造算法^[27,100-108]。此外,有时按需仅构建概念格的一部分,避免盲目构造完备格也不失为一种明智的选择^[238]。

实际上,现有的很多概念格构造算法都综合考虑上述多种策略的组合。不难预见,今后研究概念格构造算法依然会延续这条道路。最后,尤其需要强调的是,随着量子计算、DNA(Deoxyribonucleic Acid)计算、认知计算等新兴计算模式的不断涌现与普及,以及大数据、人工智能、移动Web服务等各种实际应用需求的井喷,概念格构造算法的研究与发展充满机遇与挑战。

2.3 概念格约简存在的问题

与1.3节呼应,下面阐述属性约简和概念约简研究中存在的一些问题。由于属性约简的语义非常清晰,例如现有的四种常规属性约简——保持概念格结构不变的约简、保持交(并)不可约元外延集不变的约简、粒约简,所以具有较好的应用前景。截至目前,这些属性约简方法离实践应用仍有不小的差距,主要有两方面的原因:1)有些约简方法无法回避构建概念格,会涉及庞大的计算量,令用户望而却步;2)约简算法还不够完善,计算约简本身有时也相当耗时。此外,需要继续提出更多面向用户实际需求的简易约简方法。

概念约简能保持对概念信息的需求不变,涉及更少的概念节点,理论意义非常明确。作为一个有前景的研究方向,仍需进一步探讨制约其发展的关键问题,例如保持二元关系不变的概念约简:一个形式背景对应的概念约简通常是不唯一的,那么如何快速获取概念个数最少的概念约简值得考虑。其次,概念约简一般不再是一个格(而是偏序集),那么是否存在某个偏序集能形成格结构?再者,既然概念约简并不改变原始的形式背景,而概念约简又只是全

体概念的一部分,那么是否存在完备的概念约简(按照某种方式能生成剩余的概念)也是一个重要课题。决策形式背景上的概念约简如何实施及其语义如何解释,这些都是当前面临的困难问题。最后,概念约简也可有不同的语义,1.3节重点介绍的概念约简是从保持二元关系不变的角度给出的,这意味着保持原始背景其它信息不变的概念约简仍值得继续探讨。

2.4 基于概念格的规则提取存在的问题

1.4节主要介绍决策蕴涵(包含决策规则、粒规则等)和模糊决策蕴涵的研究状况,尽管这些方面已取得丰富的研究成果,但仍存在一些关键问题需要深入探讨。基于 α 推理规则建立的决策形式背景的知识约简理论与方法离实际应用还有一定的距离,主要原因如下:1)实现这些方法均以构建概念格为前提,计算量太大;2)知识约简过程较复杂,无法在保证计算效率的情况下得出满意的约简结果,因为求解最小约简(元素个数最少的集合)本身就是一个NP-hard问题。对于1),可考虑在不构建概念格的前提下实现决策形式背景的知识约简。然而需要指出的是,这里不包括重新定义约简,单纯指计算技巧上的优化。对于2),可借鉴各种智能近似算法在计算成本和最优解之间做出权衡,这里也不包括问题等价转化再进行计算。当然,还可基于其它扩展概念格和推理规则讨论复杂决策形式背景的知识约简问题。

另外,模糊决策蕴涵较复杂,理论上表现在模糊逻辑推理方面,计算上体现在急剧增多的规则数量。这个不难理解,因为模糊概念格和经典概念格的节点个数相差太悬殊。此外,受模糊决策蕴涵中模糊逻辑因素的影响,要联系模糊决策蕴涵与模糊形式背景中特定的数据分析任务较困难。通常后者的研究超前于前者,所以模糊形式背景的模糊概念格及其约简引起学者们的关注,但对模糊决策蕴涵的研究却相对较少。不仅如此,这会进一步导致基于模糊决策蕴涵的数据驱动应用研究难以落到实处。除了受复杂的模糊逻辑因素的影响,模糊决策蕴涵的研究较少,还与构建模糊概念格涉及繁琐的计算有关。上述问题对模糊决策蕴涵的发展带来极大挑战,有待今后深入探讨。

2.5 概念知识空间存在的问题

1.5节重点介绍概念知识空间在概念认知学习中的应用,有关分析已表明概念知识空间是研究概念认知学习的核心载体,据此可完成线索导向式的概念学习过程,也能设计性能较优的增量学习分类

算法,但如下问题仍有待研究。

1)基于概念知识空间的概念学习未讨论概念知识空间的极小化,实际上它与概念学习任务是密切相关的,有可能存在一些粒概念相对于概念学习任务是冗余的。

2)基于概念知识空间的概念学习方法尚未与其他领域的同类方法进行全面对比,因此独特性有待进一步考察。

3)基于概念知识空间的概念学习未讨论如何对错误概念进行识别与修正,与人脑的概念认知过程不完全吻合,这方面或许可以借鉴文献[181]的一些研究思路。

4)基于概念知识空间的增量学习分类算法在增量学习过程中通过新样本对概念知识空间进行更新时,未讨论新样本对分类性能的影响,即有可能添加对分类结果造成干扰的新样本,从而产生负面影响。

5)基于概念知识空间的增量学习分类算法目前只考虑样本是单标签的情况,而现实中有些样本可能携带多个标签,所以仍需进一步提出适用于多标签样本的增量学习分类算法。

总之,无论是基于概念知识空间的概念学习研究,还是基于概念知识空间的增量学习分类算法,都只是刚刚起步,相关理论与方法有待进一步完善。

2.6 概念格的粒计算方法存在的问题

1.6节讨论多粒度形式概念分析与基于概念格的粒描述问题,这是两个新兴的研究方向,但相关理论和方法还不够完善,很多问题需要进一步探讨,具体概括如下。

1)多粒度形式概念分析研究中已给出多粒度形式背景的描述,考虑到多粒度数据的形成依赖于属性粒度粗细变化,在经典形式背景中布尔属性的合并与分解可反映属性粒度粗细变化情况,但是对于复杂数据很难得到类似结果,如不完备数据中包含的缺失值合并或分解不确定与哪个具体数值对应,因此有必要继续研究扩展的多粒度形式背景。

2)多粒度形式概念分析的核心概念是属性粒度粗细变化,借助于属性粒度粗细变化关系可实现知识在不同粒度空间进行相互转化,一般而言细粒度向粗粒度转化时信息会丢失,它不需要额外信息即可实现,但粗粒度向细粒度转化时信息会增加,它需要额外信息才能完成,这会带来一系列的问题,如信息丢失时如何度量及信息增加时如何在代价最小的情况下提供额外的信息完成粒度转化。

3)多粒度粗糙集和多粒度形式概念分析均可

实现多粒度数据分析与处理,那么一个值得思考的问题是:对于同个多粒度数据分析任务,从哪些角度去判断这两种方法孰优孰劣?如果各有优势,那么这两种多粒度数据分析方法能否进一步融合得到更有效的模型。

4)现有的基于概念格的粒描述方法是在给定描述语言的情况下讨论目标粒的描述,即利用某一类概念格研究粒描述。为了提高粒描述的精度,应继续探讨多种概念格相互协助的粒描述。

5)现有的基于概念格的粒描述方法都是针对静态数据进行研究,现实中的数据往往处于动态更新的环境之中,如何通过更新已有的粒描述生成新的描述结果也是一个有意义的研究课题。

6)现有的基于概念格的粒描述方法与粒计算领域中的粒描述方法^[239-240]尚未进行对比研究,优势和性能有待进一步评估。

7)在当今大数据时代,海量数据基本上都是分布式存储在空间各异的服务器上,它要求粒描述方法必须适用于分布式环境,这意味着今后需要开发相应的粒描述分布式技术。

2.7 概念格应用存在的问题

本节对概念格应用近期有望取得突破的一些研究方向存在的问题进行归纳。

1)基于概念格的本体研究。该方向已取得一些初步的研究成果,可适应时间序列模式和多维空间结构融合的本体研究,但这还远远不够,如在多粒度多维度动态数据等复杂环境下如何实现本体快速构建与有效融合仍需进一步研究。

2)基于概念格的知识表示、发现与推理。根据1.7节的讨论,概念格自身就是知识表示与发现的一种载体,不仅如此,还可通过概念蕴涵实现规则推理,这方面相关的理论与方法均较成熟。然而,以概念格为基础的知识表示、发现与推理,受概念格构建的影响会产生大量的计算成本,因此未来急需大幅提高建格效率。

3)基于概念格的认知计算。概念格自身的形成过程在某种程度上体现知识认知的规律,也较适合模拟人脑的认知过程。但是,人脑的认知过程不是简单机械地重复一个过程,它还包含一定的不确定性。为了更好地模拟人脑的认知过程,需要将认知的修正功能及认知遗忘和认知重现等复杂因素考虑在内,这是一个有挑战性的研究课题。

4)基于概念格的聚类分析。概念格的节点和层次结构都反映聚类的特性,今后有望成为机器学习领域的一个重要研究内容^[241-242]。基于概念格的聚

类方法的优势是附带额外的语义信息而使结果更具有可解释性,不足之处是概念格的计算量太大。目前,传统的方法还不适合大规模数据的聚类分析,这方面或许可以借鉴文献[31]、文献[33]和文献[34]的一些做法。

最后,需要指出的是,除了上述7个研究方向各自存在的问题之外,概念格理论与方法研究还有一些公开的问题。例如,概念的形式化描述要求外延与内涵之间相互唯一确定,但在某些情况下外延与内涵可能无法做到一一对应^[243],所以现有的概念研究方式需要革新。另外,传统的概念格理论与方法研究太注重概念的严格表示,而现实中人们对概念的使用较随意^[244],因此需要在更宽松的要求下建立新的概念表示方法。

3 结束语

概念格理论与方法的研究已将近40年,取得一系列的成果,主要集中在概念格模型推广、概念格构造、概念格约简、基于概念格的规则提取、概念知识空间、概念格的粒计算方法和概念格应用等研究方向。值此之际,本文对概念格理论与方法的研究工作进行梳理、总结与展望,特别地,分析主要研究方向今后发展可能会遇到的若干关键科学问题,提出一些初步的设想或研究思路,供从事相关领域研究或有意向解决这些问题的学者们参考。此外,需要指出的是,本文介绍的研究内容仅是概念格理论与方法取得的众多研究成果中的一部分,并未涵盖所有的研究工作。像概念格的图论方法、基于概念格的Domain理论及概念格的冲突分析研究等研究领域,本文并未展开介绍和详细分析。实际上,本文主要目的是介绍部分有特色的研究方向,归纳概念格理论与方法研究领域中一些重要的研究课题,在此基础上提出若干有理论意义或实际应用价值的问题,以便读者了解这个研究领域的致轮廊和今后发展的前景与潜力,避免过细过全地介绍研究内容而导致文章主题不够突出。

此外,根据本文对概念格理论与方法已开展的研究进行归纳和总结,不难得出如下结论。

1)传统的研究方向已较成熟,像概念格模型推广、概念格构造、概念格约简和基于概念格的规则提取,这些研究方向已逐渐开始转入深层次问题的探讨。例如,概念格模型推广需要直面理论创新与实际应用价值,概念格构造需要在计算效率上显著提高,概念格约简应尽可能避免构建整个概念格以增强实

际应用的可行性,以及基于概念格的规则提取如何大幅度抑制规则数目的快速增长。

2)新兴的研究方向才刚刚起步,像概念知识空间、概念格的粒计算方法和概念格应用中的认知计算等研究工作,目前尚处于理论和方法的完善阶段,有些问题甚至都还没有明确的定论。例如,概念知识空间如何根据实际问题确定具体的组成要素,概念格的粒计算方法如何在用户指定描述语言的情况下找到形式背景的所有可定义粒,概念格应用中的认知计算研究如何充分发挥概念格结构潜藏的有用的认知信息。

总之,概念格理论与方法的研究前景较好,现阶段需要突破本文指出的各类关键问题。特别地,如何弱化概念的严格表示以便与现实中人们对概念的理解和使用一致,将概念与粒知识联系使概念格与粒计算进行深度融合,用于解决更多的实际问题,以及对概念认知的深入研究,从而发挥概念是基本的认知单元的积极作用。这些方面一旦取得实质性的突破,将会极大促进人工智能、认知科学等领域的进一步发展。

最后,需要强调的是,概念格理论与方法的研究不再只局限于形式概念分析的理论框架下进行探讨,它发展到今天已经与其它理论深度交叉融合,如粗糙集、模糊集、粒计算、三支决策及认知计算等,从而可更好地解决机器学习、人工智能、认知科学等领域中存在的关键科学问题。

致谢 本文特为庆祝中国粒计算与知识发现学术会议召开20周年而撰写,感谢会议多年来为相关研究领域提供交流平台,促进粗糙集、概念格、粒计算、三支决策等研究方向的快速发展!

参 考 文 献

- [1] WILLE R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts // RIVAL I, ed. Ordered Sets. Berlin, Germany: Springer, 1982: 445–470.
- [2] ZADEH L A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338–353.
- [3] PAWLAK Z. Rough Sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 1982, 11(5): 341–356.
- [4] ZADEH L A. Toward a Theory of Fuzzy Information Granulation and Its Centrality in Human Reasoning and Fuzzy Logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 90(2): 111–127.
- [5] YAO Y Y. Three-Way Decisions with Probabilistic Rough Sets. *Information Sciences*, 2010, 180(3): 341–353.
- [6] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations. Berlin, Germany: Springer, 1999.
- [7] CARPINETO C, ROMANO G. A Lattice Conceptual Clustering System and Its Application to Browsing Retrieval. *Machine Learning*, 1996, 24(2): 95–122.
- [8] NGUYEN P H P, CORBETT D. A Basic Mathematical Framework for Conceptual Graphs. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2006, 18(2): 261–271.
- [9] TU X D, WANG Y L, ZHANG M L, et al. Using Formal Concept Analysis to Identify Negative Correlations in Gene Expression Data. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, 2016, 13(2): 380–391.
- [10] ZOU C F, ZHANG D Q, WAN J F, et al. Using Concept Lattice for Personalized Recommendation System Design. *IEEE Systems Journal*, 2017, 11(1): 305–314.
- [11] SAMPATH S, SPRENKLE S, GIBSON E, et al. Applying Concept Analysis to User-Session-Based Testing of Web Applications. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 2007, 33(10): 643–658.
- [12] 陈德刚,徐伟华,李金海,等.粒计算基础教程.北京:科学出版社,2019.
(CHEN D G, XU W H, LI J H, et al. Elements of Granular Computing. Beijing, China: Science Press, 2019.)
- [13] MEDINA J. Relating Attribute Reduction in Formal, Object-Oriented and Property-Oriented Concept Lattices. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, 64(6): 1992–2002.
- [14] BURUSCO A, FUENTES-GONZALEZ R. The Study of the L-Fuzzy Concept Lattice. *Mathware and Soft Computing*, 1994, 1(3): 209–218.
- [15] BELOHLÁVEK R. Fuzzy Galois Connections. *Mathematical Logic Quarterly*, 1999, 45(4): 497–504.
- [16] DUNTSCH I, GEDIGA G. Modal-Style Operators in Qualitative Data Analysis // Proc of the IEEE International Conference on Data Mining. Washington, USA: IEEE, 2002: 155–162.
- [17] YAO Y Y. Concept Lattices in Rough Set Theory // Proc of the IEEE Annual Meeting of Fuzzy Information. Washington, USA: IEEE, 2004: 796–801.
- [18] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-Way Formal Concept Analysis // Proc of the International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin, Germany: Springer, 2014: 732–741.
- [19] LEHMANN F, WILLE R. A Triadic Approach to Formal Concept Analysis // Proc of the 3rd International Conference on Conceptual Structures. Berlin, Germany: Springer, 1995: 32–43.
- [20] DJOUADI Y, PRADE H. Interval-Valued Fuzzy Formal Concept Analysis // Proc of the International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems. Berlin, Germany: Springer, 2009: 592–

- 601.
- [21] JAOUA A, ELLOUMI S. Galois Connection, Formal Concepts and Galois Lattice in Real Relations: Application in a Real Classifier. *Journal of Systems and Software*, 2002, 60(2): 149–163.
- [22] GODIN R, MISSAOUI R, ALAOUI H. Incremental Concept Formation Algorithms Based on Galois(Concept) Lattices. *Computational Intelligence*, 1995, 11(2): 246–267.
- [23] VALTCHEV P, MISSAOUI R, LEBRUN P. A Partition-Based Approach towards Constructing Galois(Concept) Lattices. *Discrete Mathematics*, 2002, 256(3): 801–829.
- [24] FU H G, NGUIFO E M. A Parallel Algorithm to Generate Formal Concepts for Large Data // Proc of the 2nd International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin, Germany: Springer, 2004: 394–401.
- [25] 张文修, 魏玲, 郑建军. 概念格的属性约简理论与方法. *中国科学(信息科学)*, 2005, 35(6): 628–639.
(ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute Reduction Theory and Approach to Concept Lattice. *Science in China (Information Sciences)*, 2005, 35(6): 628–639.)
- [26] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular Computing and Knowledge Reduction in Formal Contexts. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2009, 21(10): 1461–1474.
- [27] STUMME G, TAOUIL R, BASTIDE Y, et al. Computing Iceberg Concept Lattices with Titanic. *Data and Knowledge Engineering*, 2002, 42(2): 189–222.
- [28] 张文修, 仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策. 北京: 清华大学出版社, 2005.
(ZHANG W X, QIU G F. Uncertain Decision Making Based on Rough Sets. Beijing, China: Tsinghua University Press, 2005.)
- [29] LI J H, MEI C L, LÜ Y J. A Heuristic Knowledge-Reduction Method for Decision Formal Contexts. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, 61(4): 1096–1106.
- [30] LI J H, MEI C L, LÜ Y J. Knowledge Reduction in Decision Formal Contexts. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(5): 709–715.
- [31] SHI Y, MI Y L, LI J H, et al. Concurrent Concept-Cognitive Learning Model for Classification. *Information Sciences*, 2019, 496: 65–81.
- [32] LI J H, MEI C L, XU W H, et al. Concept Learning via Granular Computing: A Cognitive Viewpoint. *Information Sciences*, 2015, 298: 447–467.
- [33] MI Y L, SHI Y, LI J H, et al. Fuzzy-Based Concept Learning Method: Exploiting Data with Fuzzy Conceptual Clustering [J/OL]. [2020-04-07]. <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=9058987>.
- [34] SHI Y, MI Y L, LI J H, et al. Concept-Cognitive Learning Model for Incremental Concept Learning [J/OL]. [2020-04-07]. <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=8574051>.
- [35] WEI L, WAN Q. Granular Transformation and Irreducible Elements Judgment Based on Pictorial Diagrams. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(2): 380–387.
- [36] XU W H, LI W T. Granular Computing Approach to Two-Way Learning Based on Formal Concept Analysis in Fuzzy Datasets. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 46(2): 366–379.
- [37] MA J M, ZHANG W X, LEUNG Y, et al. Granular Computing and Dual Galois Connection. *Information Sciences*, 2007, 177(23): 5365–5377.
- [38] KANG X P, LI D Y, WANG S G, et al. Formal Concept Analysis Based on Fuzzy Granularity Base for Different Granulations. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, 203: 33–48.
- [39] SHAO M W, LEUNG Y, WANG X Z, et al. Granular Reducts of Formal Fuzzy Contexts. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 114: 156–166.
- [40] 李金海, 吴伟志. 形式概念分析的粒计算方法及其研究展望. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(7): 1–12.
(LI J H, WU W Z. Granular Computing Approach for Formal Concept Analysis and Its Research Outlooks. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2017, 52(7): 1–12.)
- [41] ZHI H L, LI J H. Granule Description Based on Formal Concept Analysis. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 104: 62–73.
- [42] 苗夺谦, 张清华, 钱宇华, 等. 从人类智能到机器实现模型——粒计算理论与方法. *智能系统学报*, 2016, 11(6): 743–757.
(MIAO D Q, ZHANG Q H, QIAN Y H, et al. From Human Intelligence to Machine Implementation Model: Theories and Applications Based on Granular Computing. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2016, 11(6): 743–757.)
- [43] 梁吉业, 钱宇华, 李德玉, 等. 大数据挖掘的粒计算理论与方法. *中国科学(信息科学)*, 2015, 45(11): 1355–1369.
(LIANG J Y, QIAN Y H, LI D Y, et al. Theory and Method of Granular Computing for Big Data Mining. *Science in China (Information Sciences)*, 2015, 45(11): 1355–1369.)
- [44] 徐计, 王国胤, 于洪. 基于粒计算的大数据处理. *计算机学报*, 2015, 38(8): 1497–1517.
(XU J, WANG G Y, YU H. Review of Big Data Processing Based on Granular Computing. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1497–1517.)
- [45] KUZNETSOV S O. Complexity of Learning in Concept Lattices from Positive and Negative Examples. *Discrete Applied Mathematics*, 2004, 142(1/2/3): 111–125.
- [46] 范世青, 张文修. 模糊概念格与模糊推理. *模糊系统与数学*, 2006, 20(1): 11–17.
(FAN S Q, ZHANG W X. Fuzzy Concept Lattice and Fuzzy Reasoning. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2006, 20(1): 11–17.)

- [47] GEORGESCU G, POPESCU A. Non-Dual Fuzzy Connections. *Archive for Mathematical Logic*, 2004, 43(8): 1009–1039.
- [48] 杨丽, 徐杨. 基于格值逻辑的模糊概念格. 模糊系统与数学, 2009, 23(5): 15–20.
(YANG L, XU Y. Fuzzy Concept Lattice Based on Lattice-Valued Logic. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2009, 23(5): 15–20.)
- [49] MEDINA J, OJEDA-ACIEGO M. Multi-adjoint t -Concept Lattices. *Information Sciences*, 2010, 180(5): 712–725.
- [50] ELLOUMI S, JAAM J, HASNAH A, et al. A Multi-level Conceptual Data Reduction Approach Based on the Lukasiewicz Implication. *Information Sciences*, 2004, 163(4): 253–262.
- [51] ZHANG W X, MA J M, FAN S Q. Variable Threshold Concept Lattices. *Information Sciences*, 2007, 177(22): 4883–4892.
- [52] LI L F, ZHANG J K. Attribute Reduction in Fuzzy Concept Lattices Based on the T Implication. *Knowledge-Based Systems*, 2010, 23(6): 497–503.
- [53] BELOHLÁVEK R. A Note on Variable Threshold Concept Lattices: Threshold-Based Operators are Reducible to Classical Concept-Forming Operators. *Information Sciences*, 2007, 177(15): 3186–3191.
- [54] BĚLOHLÁVEK R, SKLENÁŘ V, ZACKPAL J. Crisply Generated Fuzzy Concepts // Proc of the 3rd International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin, Germany: Springer, 2005: 269–284.
- [55] LI J H, MEI C L, LÜ Y J. Incomplete Decision Contexts: Approximate Concept Construction, Rule Acquisition and Knowledge Reduction. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2013, 54(1): 149–165.
- [56] YAO Y Y. Interval Sets and Three-Way Concept Analysis in Incomplete Contexts. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(1): 3–20.
- [57] DEOGUN J S, SAQUER J. Monotone Concepts for Formal Concept Analysis. *Discrete Applied Mathematics*, 2004, 144(1/2): 70–78.
- [58] WANG L D, LIU X D. Concept Analysis via Rough Set and AFS Algebra. *Information Sciences*, 2008, 178(21): 4125–4137.
- [59] 龙柄翰, 徐伟华. 模糊三支概念分析与模糊三支概念格. *南京大学学报(自然科学版)*, 2019, 54(4): 537–545.
(LONG B H, XU W H. Fuzzy Three-Way Concept Analysis and Fuzzy Three-way Concept Lattice. *Journal of Nanjing University (Natural Science)*, 2019, 54(4): 537–545.)
- [60] GANTER B, KUZNETSOV S O. Pattern Structures and Their Projections // Proc of the International Conference on Conceptual Structures. Berlin, Germany: Springer, 2001: 129–142.
- [61] KUZNETSOV S O. Learning of Simple Conceptual Graphs from Positive and Negative Examples // Proc of the European Conference on Principles of Data Mining and Knowledge Discovery. Berlin, Germany: Springer, 1999: 384–391.
- [62] BORDAT J P. Calcul Pratique du Treillis de Galois d'une Correspondance. *Mathmatiques et Sciences Humaines*, 1986, 96: 31–47.
- [63] NOURINE L, RAYNAUD O. A Fast Algorithm for Building Lattices. *Information Processing Letters*, 1999, 71 (5/6): 199–204.
- [64] LINDIG C. Fast Concept Analysis // Proc of the 8th International Conference on Conceptual Structures. Berlin, Germany: Springer, 2000: 152–161.
- [65] VALTCHEV P, MISSAOUI R. Building Concept (Galois) Lattices from Parts: Generalizing the Incremental Methods // Proc of the 9th International Conference on Conceptual Structures. Berlin, Germany: Springer, 2001: 290–303.
- [66] CHOI V. Faster Algorithms for Constructing a Concept (Galois) Lattice [C/OL]. [2020-04-07]. <https://arxiv.org/pdf/cs/0602069.pdf>.
- [67] VAN DER MERWE D, OBIEDKOV S, KOURIE D. AddIntent: A New Incremental Algorithm for Constructing Concept Lattices // Proc of the International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin, Germany: Springer, 2004: 372–385.
- [68] ANDREWS S. In-Close, A Fast Algorithm for Computing Formal Concepts // Proc of the 17th International Conference on Conceptual Structures. Berlin, Germany: Springer, 2009: 1–14.
- [69] NJIWOUA P, NGUIFO E M. A Parallel Algorithm to Build Concept Lattice // Proc of the 4th Groningen International Information Technology Conference for Students. Fevrier, The Netherlands: University of Groningen Press, 1997: 103–107.
- [70] KENGUE J F D, VALTCHEV P, FJAMEGNI C T. A Parallel Algorithm for Lattice Construction // Proc of the International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin, Germany: Springer, 2005: 249–264.
- [71] KRAJCA P, OUTRATA J, VYCHODIL V. Parallel Algorithm for Computing Fixpoints of Galois Connections. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2010, 59(2): 257–272.
- [72] OUTRATA J, VYCHODIL V. Fast Algorithm for Computing Fixpoints of Galois Connections Induced by Object-Attribute Relational Data. *Information Sciences*, 2012, 185(1): 114–127.
- [73] OUTRATA J. A Lattice-Free Concept Lattice Update Algorithm Based on *CbO // Proc of the 10th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Berlin, Germany: Springer, 2013: 261–274.
- [74] MUANGPRATHUB J. A Novel Algorithm for Building Concept Lattice. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, 8(11): 507–515.
- [75] AMRANE B, BELALEM G, BRANCI S, et al. Efficient Incremental Algorithm for Building Swiftly Concepts Lattices. *International Journal of Web Portals*, 2014, 6(1): 21–34.

- [76] 齐红, 刘大有, 胡成全, 等. 基于搜索空间划分的概念生成算法. *软件学报*, 2005, 16(12): 2029–2035.
(QI H, LIU D Y, HU C Q, et al. An Algorithm for Generating Concepts Based on Search Space Partition. *Journal of Software*, 2005, 16(12): 2029–2035.)
- [77] 张继福, 张素兰, 胡立华. 约束概念格及其构造方法. *智能系统学报*, 2006, 1(2): 31–38.
(ZHANG J F, ZHANG S L, HU L H. Constrained Concept Lattice and Its Construction Method. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2006, 1(2): 31–38.)
- [78] 杜秋香, 张继福, 张素兰. 概念格特化的概念格更新构造算法. *智能系统学报*, 2008, 3(5): 443–448.
(DU Q X, ZHANG J F, ZHANG S L. An Improved Algorithm Based on Concept Specialization for Constructing Concept Lattices. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2008, 3(5): 443–448.)
- [79] 董辉, 马垣, 宫玺. 一种新的概念格并行构造算法. *计算机科学与探索*, 2008, 2(6): 651–657.
(DONG H, MA Y, GONG X. A New Parallel Algorithm for Construction of Concept Lattice. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2008, 2(6): 651–657.)
- [80] 智慧来, 智东杰, 刘宗田. 概念格合并原理与算法. *电子学报*, 2010, 38(2): 455–459.
(ZHI H L, ZHI D J, LIU Z T. Theory and Algorithm of Concept Lattice Union. *Acta Electronica Sinica*, 2010, 38(2): 455–459.)
- [81] ZHI H L, LI J H. Influence of Dynamical Changes on Concept Lattice and Implication Rules. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2018, 9(5): 795–805.
- [82] 姜琴, 张卓, 王黎明. 基于多属性同步消减的概念格构造算法. *小型微型计算机系统*, 2016, 37(4): 646–652.
(JIANG Q, ZHANG Z, WANG L M. Algorithms of Constructing Concept Lattice Based on Deleting Multiple Attributes Synchronously. *Journal of Chinese Computer Systems*, 2016, 37(4): 646–652.)
- [83] 张涛, 白冬辉, 李慧. 属性拓扑的并行概念计算算法. *软件学报*, 2017, 28(12): 3129–3145.
(ZHANG T, BAI D H, LI H. Parallel Concept Computing Based on Bottom-up Decomposition of Attribute Topology. *Journal of Software*, 2017, 28(12): 3129–3145.)
- [84] 蔡勇, 陈红梅. MapReduce 环境下基于概念分层的概念格并行构造算法. *中国科学技术大学学报*, 2018, 48(4): 275–283.
(CAI Y, CHEN H M. A Parallel Algorithm for Constructing Concept Lattice Based on Hierarchical Concept under MapReduce. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2018, 48(4): 275–283.)
- [85] BĚLOHLÁVEK R, VYCHODIL V. What Is a Fuzzy Concept Lattice [C/OL]. [2020-04-07]. <https://pdfs.semanticscholar.org/df4c/eed281d70fe1aa2b9f481ce8a1912d44fcb6.pdf>.
- [86] PÓCS J. Note on Generating Fuzzy Concept Lattices via Galois Connections. *Information Sciences*, 2012, 185(1): 128–136.
- [87] CROSS V, KANDASAMY M, YI W T. Comparing Two Approaches to Creating Fuzzy Concept Lattices // Proc of the Annual Meeting of the North American on Fuzzy Information Processing Society. Washington, USA: IEEE, 2011. DOI: 10.1109/NAFIPS.2011.5752007.
- [88] THO Q T, HUI S C, FONG A C M, et al. Automatic Fuzzy Ontology Generation for the Semantic Web. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2006, 18(6): 842–856.
- [89] 许佳卿, 彭鑫, 赵文耘. 一种基于模糊概念格和代码分析的软件演化分析方法. *计算机学报*, 2009, 32(9): 1832–1844.
(XU J Q, PENG X, ZHAO W Y. An Evolution Analysis Method Based on Fuzzy Concept Lattice and Source Code Analysis. *Chinese Journal of Computers*, 2009, 32(9): 1832–1844.)
- [90] DE MAIO C, FENZA G, LOIA V, et al. Towards an Automatic Fuzzy Ontology Generation // Proc of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Washington, USA: IEEE, 2009: 1044–1049.
- [91] 刘宗田, 强宇, 周文, 等. 一种模糊概念格模型及其渐进式构造算法. *计算机学报*, 2007, 30(2): 184–188.
(LIU Z T, QIANG Y, ZHOU W, et al. A Fuzzy Concept Lattice Model and Its Incremental Construction Algorithm. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(2): 184–188.)
- [92] BĚLOHLÁVEK R. What Is a Fuzzy Concept Lattice? II // Proc of the 13th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing. Berlin, Germany: Springer, 2011: 19–26.
- [93] BĚLOHLÁVEK R, DE BAETS B, OUTRATA B, et al. Computing the Lattice of All Fixpoints of a Fuzzy Closure Operator. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(3): 546–557.
- [94] BĚLOHLÁVEK R. Algorithms for Fuzzy Concept Lattices // Proc of the 4th International Conference on Recent Advances in Soft Computing. Berlin, Germany: Springer, 2002: 200–205.
- [95] BĚLOHLÁVEK R, OUTRATA J, VYCHODIL V. Direct Factorization by Similarity of Fuzzy Concept Lattice by Factorization of Input Data // Proc of the 4th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Berlin, Germany: Springer, 2006: 68–79.
- [96] BĚLOHLÁVEK R, DVOŘÁK J, OUTRATA J. Fast Factorization by Similarity in Formal Concept Analysis of Data with Fuzzy Attributes. *Journal of Computer and System Sciences*, 2007, 73(6): 1012–1022.
- [97] 张卓, 柴玉梅, 王黎明, 等. 模糊形式概念并行构造算法. *模式识别与人工智能*, 2013, 26(3): 260–269.

- (ZHANG Z, CHAI Y M, WANG L M, et al. A Parallel Algorithm Generating Fuzzy Formal Concepts. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2013, 26(3): 260–269.)
- [98] 张卓, 杜鹃, 王黎明. 基于负载均衡的模糊概念并行构造算法. *控制与决策*, 2014, 29(11): 1935–1942.
- (ZHANG Z, DU J, WANG L M. Load Balance-Based Algorithm for Parallelly Generating Fuzzy Formal Concepts. *Control and Decision*, 2014, 29(11): 1935–1942.)
- [99] ZHANG Z. Constructing L-Fuzzy Concept Lattices without Fuzzy Galois Closure Operation. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018, 333: 71–86.
- [100] ROUANE M H, NEHME K, VALTCHEV P, et al. On-Line Maintenance of Iceberg Concept Lattices // Proc of the 12th International Conference on Conceptual Structures. Berlin, Germany: Springer, 2004: 1–14.
- [101] NEHMÉ K, VALTCHEV P, ROUANE M H, et al. On Computing the Minimal Generator Family for Concept Lattices and Icebergs // Proc of the International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin, Germany: Springer, 2005: 192–207.
- [102] ZAKI M J, HSIAO C J. Efficient Algorithms for Mining Closed Itemsets and Their Lattice Structure. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2005, 17(4): 462–478.
- [103] HU X G, LIU W, WANG D X, et al. Mining Frequent Itemsets Using a Pruned Concept Lattice // Proc of the 4th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Washington, USA: IEEE, 2007. DOI: 10.1109/FSKD.2007.401.
- [104] 王黎明, 张卓. 基于iceberg概念格并置集成的闭频繁项集挖掘算法. *计算机研究与发展*, 2007, 44(7): 1184–1190.
(WANG L M, ZHANG Z. An Algorithm for Mining Closed Frequent Itemsets Based on Apposition Assembly of Iceberg Concept Lattices. *Journal of Computer Research and Development*, 2007, 44(7): 1184–1190.)
- [105] 柴玉梅, 张卓, 王黎明. 基于频繁概念直乘分布的全局闭频繁项集挖掘算法. *计算机学报*, 2012, 35(5): 990–1001.
(CHAI Y M, ZHANG Z, WANG L M. An Algorithm for Mining Global Closed Frequent Itemsets Based on Distributed Frequent Concept Direct Product. *Chinese Journal of Computers*, 2012, 35(5): 990–1001.)
- [106] LA P T, LE B, VO B. Incrementally Building Frequent Closed Itemset Lattice. *Expert Systems with Applications*, 2014, 41(6): 2703–2712.
- [107] GUPTA A, BHATNAGAR V, KUMAR N. Mining Closed Itemsets in Data Stream Using Formal Concept Analysis // Proc of the International Conference on Data Warehousing and Knowledge Discovery. Berlin, Germany: Springer, 2010: 285–296.
- [108] KOVÁCS L, GÁBOR S. Generalization of String Transformation Rules Using Optimized Concept Lattice Construction Method. *Procedia Engineering*, 2017, 181: 604–611.
- [109] WILLE R. The Basic Theorem of Triadic Concept Analysis. *Order*, 1995, 12(2): 149–158.
- [110] OSICKA P. Algorithms for Computation of Concept Trilattice of Triadic Fuzzy Context // Proc of the International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Berlin, Germany: Springer, 2012: 221–230.
- [111] BĚLOHLÁVEK R, OSICKA P. Triadic Concept Lattices of Data with Graded Attributes. *International Journal of General Systems*, 2012, 41(2): 93–108.
- [112] BĚLOHLÁVEK R, OSICKA P. Triadic Fuzzy Galois Connections as Ordinary Connections. *Fuzzy Sets and Systems*, 2014, 249: 83–99.
- [113] 魏玲, 万青, 钱婷, 等. 三元概念分析综述. *西北大学学报(自然科学版)*, 2014, 44(5): 689–699.
(WEI L, WAN Q, QIAN T, et al. An Overview of Triadic Concept Analysis. *Journal of Northwest University(Natural Science Edition)*, 2014, 44(5): 689–699.)
- [114] 汤亚强, 范敏, 李金海. 三元形式概念分析下的认知系统模型及信息粒转化方法. *山东大学学报(理学版)*, 2014, 49(8): 102–106.
(TANG Y Q, FAN M, LI J H. Cognitive System Model and Approach to Transformation of Information Granules under Triadic Formal Concept Analysis. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2014, 49(8): 102–106.)
- [115] 王冰洁, 张卓, 王黎明. 概念三元格渐进式构造算法. *小型微型计算机系统*, 2017, 38(9): 2101–2106.
(WANG B J, ZHANG Z, WANG L M. Incremental Algorithm for Constructing Concept Trilattices. *Journal of Chinese Computer Systems*, 2017, 38(9): 2101–1206.)
- [116] 王霞, 江山, 李俊余, 等. 三元概念的一种构造方法. *计算机研究与发展*, 2019, 56(4): 844–853.
(WANG X, JIANG S, LI J Y, et al. A Construction Method of Triadic Concepts. *Journal of Computer Research and Development*, 2019, 56(4): 844–853.)
- [117] WEI L, QIAN T, WAN Q, et al. A Research Summary about Triadic Concept Analysis. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2018, 9(4): 699–712.
- [118] LI J H, MEI C L, WANG J H, et al. Rule-Preserved Object Compression in Formal Decision Contexts Using Concept Lattices. *Knowledge-Based Systems*, 2014, 71: 435–445.
- [119] TRNECKA M, TRNECKOVÁ M. Data Reduction for Boolean Matrix Factorization Algorithms Based on Formal Concept Analysis. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 158: 75–80.
- [120] 魏玲. 粗糙集与概念格约简理论与方法. 博士学位论文. 西安: 西安交通大学, 2005.

- (WEI L. Reduction Theory and Approach to Rough Set and Concept Lattice. Xi'an, China: Xi'an Jiaotong University, 2005.)
- [121] WANG X, MA J M. A Novel Approach to Attribute Reduction in Concept Lattices // Proc of the International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin, Germany: Springer, 2006; 522–529.
- [122] MI J S, LEUNG Y, WU W Z. Approaches to Attribute Reduction in Concept Lattices Induced by Axialities. *Knowledge-Based Systems*, 2010, 23(6): 504–511.
- [123] LI T J, LI M Z, GAO Y. Attribute Reduction of Concept Lattice Based on Irreducible Elements. *International Journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing*, 2013, 11(6): 2792–2813.
- [124] 魏玲,祁建军,张文修.决策形式背景的概念格属性约简.中国科学(信息科学),2008,38(2):195–208.
(WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute Reduction and Rules Extraction in Decision Formal Context Based on Concept Lattice. *Science in China (Information Sciences)*, 2008, 38(2): 195–208.)
- [125] LI J H, MEI C L, LÜ Y J. Knowledge Reduction in Formal Decision Contexts Based on an Order-Preserving Mapping. *International Journal of General Systems*, 2012, 41(2): 143–161.
- [126] LI J H, MEI C L, LÜ Y J. Knowledge Reduction in Real Decision Formal Contexts. *Information Sciences*, 2012, 189: 191–207.
- [127] SHAO M W, LI K W. Attribute Reduction in Generalized One-Sided Formal Contexts. *Information Sciences*, 2017, 378: 317–327.
- [128] 王振,魏玲.基于单边区间集概念格的不完备形式背景的属性约简.计算机科学,2018,45(1):73–78.
(WANG Z, WEI L. Attribute Reduction of Partially-Known Formal Concept Lattices for Incomplete Contexts. *Computer Science*, 2018, 45(1): 73–78.)
- [129] 王振.基于部分已知概念格的不完备形式背景的属性约简与规则提取.硕士学位论文.西安:西北大学,2018.
(WANG Z. Attribute Reduction and Rule Acquisition of Incomplete Formal Contexts Based on Partially-Known Concept Lattices. Master Dissertation. Xi'an, China: Northwest University, 2018.)
- [130] LIU M, SHAO M W, ZHANG W X, et al. Reduction Method for Concept Lattices Based on Rough Set Theory and Its Application. *Computers and Mathematics with Applications*, 2007, 53(9): 1390–1410.
- [131] QIN K Y, LI B, PEI Z. Attribute Reduction and Rule Acquisition of Formal Decision Context Based on Object (Property) Oriented Concept Lattices. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2019, 10(10): 2837–2850.
- [132] ZOU L, PANG K, SONG X Y, et al. A Knowledge Reduction Approach for Linguistic Concept Formal Context. *Information Sciences*, 2020, 524: 165–183.
- [133] CORNEJO M E, MEDINA J, RAMIREZ-POUSSA E. Attribute and Size Reduction Mechanisms in Multi-Adjoint Concept Lattices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, 318: 388–402.
- [134] REN R S, WEI L. The Attribute Reductions of Three-Way Concept Lattices. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 99: 92–102.
- [135] QI J J, QIAN T, WEI L. The Connections between Three-Way and Classical Lattices. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 143–151.
- [136] LI M Z, WANG G Y. Approximate Concept Construction with Three-Way Decisions and Attribute Reduction in Incomplete Contexts. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91: 165–178.
- [137] 曹丽,魏玲,祁建军.保持二元关系不变的概念约简.模式识别与人工智能,2018,31(6):516–524.
(CAO L, WEI L, QI J J. Concept Reduction Preserving Binary Relations. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2018, 31(6): 516–524.)
- [138] KEPRT A, SNAŠEL V. Binary Factor Analysis with Help of Formal Concepts // Proc of the International Workshop on Concept Lattices and Their Applications. Berlin, Germany: Springer, 2004: 90–101.
- [139] BĚLOHLÁVEK R, VYCHODIL V. On Boolean Factor Analysis with Formal Concept as Factors // Proc of the International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems and International Symposium on Advanced Intelligent Systems. Washington, USA: IEEE, 2006: 1054–1059.
- [140] BĚLOHLÁVEK R, VYCHODIL V. Discovery of Optimal Factors in Binary Data via a Novel Method of Matrix Decomposition. *Journal of Computer and System Sciences*, 2010, 76(1): 3–20.
- [141] BĚLOHLÁVEK R, TRNECKA M. From-below Approximations in Boolean Matrix Factorization: Geometry and New Algorithm. *Journal of Computer and System Sciences*, 2015, 81(8): 1678–1697.
- [142] 魏玲,曹丽,祁建军,等.形式概念分析中的概念约简与概念特征[J/OL].[2019-09-06].<http://engine.scichina.com/publisher/scp/journal/SSI/doi/10.1360/N112018-00272?slug=abstract>.
(WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept Reduction and Concept Characteristics in Formal Concept Analysis [J/OL]. [2019-09-06]. <http://engine.scichina.com/publisher/scp/journal/SSI/doi/10.1360/N112018-00272?slug=abstract>.)
- [143] 谢小贤,李进金,陈东晓,等.基于布尔矩阵的保持二元关系不变的概念约简.山东大学学报(理学版),2020,55(5):32–45.

- (XIE X X, LI J J, CHEN D X, et al. Concept Reduction of Preserving Binary Relations Based on Boolean Matrix. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2020, 55(5): 32–45.)
- [144] MAIER D. *The Theory of Relational Data Bases*. Rockville, USA: Computer Science Press, 1983.
- [145] AGRAWAL R, SRIKANT R. Fast Algorithms for Mining Association Rules // Proc of the 20th International Conference on Very Large Data Bases. San Francisco, USA: Morgan Kaufmann Publishers, 1994: 487–499.
- [146] MISSAOUI R, GODIN R. Search for Concepts and Dependencies in Databases // ZIARKO W P, ed. *Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery*. Berlin, Germany: Springer, 1994: 16–23.
- [147] 王志海,胡可云,胡学钢,等.概念格上规则提取的一般算法与渐进式算法. *计算机学报*, 1999, 22(1): 66–70.
(WANG Z H, HU K Y, HU X G, et al. General and Incremental Algorithms of Rule Extraction Based on Concept Lattice. *Chinese Journal of Computers*, 1999, 22(1): 66–70.)
- [148] 谢志鹏,刘宗田.概念格与关联规则发现. *计算机研究与发展*, 2000, 37(12): 1415–1421.
(XIE Z P, LIU Z T. Concept Lattice and Association Rule Discovery. *Journal of Computer Research and Development*, 2000, 37(12): 1415–1421.)
- [149] 胡可云,陆玉昌,石纯一.基于概念格的分类和关联规则的集成挖掘方法. *软件学报*, 2000, 11(11): 1478–1484.
(HU K Y, LU Y C, SHI C Y. An Integrated Mining Approach for Classification and Association Rule Based on Concept Lattice. *Journal of Software*, 2000, 11(11): 1478–1484.)
- [150] 梁吉业,王俊红.基于概念格的规则产生集挖掘算法. *计算机研究与发展*, 2004, 41(8): 1339–1344.
(LIANG J Y, WANG J H. An Algorithm for Extracting Rule-Generating Sets Based on Concept Lattice. *Journal of Computer Research and Development*, 2004, 41(8): 1339–1344.)
- [151] SAHAMI M. Learning Classification Rules Using Lattices // Proc of the European Conference on Machine Learning. Berlin, Germany: Springer, 1995: 343–346.
- [152] DUQUENNE V, GUIGUES J L. Famille Minimale d'Implications Informatives Résultant d'un Tableau de Données Binaires. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1986, 24(95): 5–18.
- [153] SERTKAYA B. Towards the Complexity of Recognizing Pseudo-Intents // Proc of the 17th International Conference on Conceptual Structures. Berlin, Germany: Springer, 2009: 284–292.
- [154] BABIN M A, KUZNETSOV S O. Recognizing Pseudo-Intents Is coNP-Complete // Proc of the 7th International Conference on Concept Lattices and Their Applications. Berlin, Germany: Springer, 2010: 294–301.
- [155] QU K S, ZHAI Y H. Generating Complete Set of Implications for Formal Contexts. *Knowledge-Based Systems*, 2008, 21(5): 429–433.
- [156] 马垣,张学东,迟呈英.紧致依赖与内涵亏值. *软件学报*, 2011, 22(5): 962–972.
(MA Y, ZHANG X D, CHI C Y. Compact Dependencies and Intent Waned Values. *Journal of Software*, 2011, 22(5): 962–971.)
- [157] ZAKI M J, OGIHARA M. Theoretical Foundations of Association Rules // Proc of the 3rd ACM SIGMOD Workshop on Research Issues in Data Mining and Knowledge Discovery. New York, USA: ACM, 1998: 1–8.
- [158] BASTIDE Y, PASQUIER N, TAOUIL R, et al. Mining Minimal Non-redundant Association Rules Using Frequent Closed Itemsets // Proc of the 1st International Conference on Computational Logic. Berlin, Germany: Springer, 2000: 972–986.
- [159] BALCAZAR J L. Redundancy, Deduction Schemes, and Minimum-Size Bases for Association Rules. *Logical Methods in Computer Science*, 2010, 6(2): 1–33.
- [160] BELOHLAVEK R, DE BAETS B, OUTRATA J, et al. Inducing Decision Trees via Concept Lattices. *International Journal of General Systems*, 2009, 38(4): 455–467.
- [161] QU K S, ZHAI Y H, ZHAO Y M, et al. Study of Decision Implications Based on Formal Concept Analysis. *Journal of Systems Science and Information*, 2006, 4(3): 533–542.
- [162] STUMME G, TAOUIL R, BASTIDE Y, et al. Fast Computation of Concept Lattices Using Data Mining Techniques // Proc of the 7th International Workshop on Knowledge Representation Meets Databases. Berlin, Germany: Springer, 2000: 129–139.
- [163] LI J H, MEI C L, KUMAR C A, et al. On Rule Acquisition in Decision Formal Contexts. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2013, 4(6): 721–731.
- [164] LI J H, HUANG C C, MEI C L, et al. An Intensive Study on Rule Acquisition in Formal Decision Contexts Based on Minimal Closed Label Concept Lattices. *Intelligent Automation and Soft Computing*, 2017, 23(3): 519–533.
- [165] ZHANG S X, LI D Y, ZHAI Y H, et al. A Comparative Study of Decision Implication, Concept Rule and Granular Rule. *Information Sciences*, 2020, 508: 33–49.
- [166] WEI L, LIU L, QI J J, et al. Rules Acquisition of Formal Decision Contexts Based on Three-Way Concept Lattices. *Information Sciences*, 2020, 516: 529–544.
- [167] ZHAI Y H, LI D Y, QU K S. Decision Implications: A Logical Point of View. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2014, 5(4): 509–516.
- [168] ZHAI Y H, LI D Y, QU K S. Decision Implication Canonical Basis: A Logical Perspective. *Journal of Computer and System Sciences*, 2015, 81(1): 208–218.

- [169] 翟岩慧,李德玉,曲开社. 决策蕴涵规范基. 电子学报, 2015, 43(1): 18–23.
(ZHAI Y H, LI D Y, QU K S. Canonical Basis for Decision Implications. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(1): 18–23.)
- [170] LI D Y, ZHANG S X, ZHAI Y H. Method for Generating Decision Implication Canonical Basis Based on True Premises. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(1): 57–67.
- [171] ZHAI Y H, LI D Y, ZHANG J. Variable Decision Knowledge Representation: A Logical Description. *Journal of Computational Science*, 2017, 25: 161–169.
- [172] ZHAI Y H, LI D Y, QU K S. Fuzzy Decision Implications. *Knowledge-Based System*, 2013, 37: 230–236.
- [173] ZHAI Y H, LI D Y, QU K S. Fuzzy Decision Implication Canonical Basis. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2018, 9(11): 1909–1917.
- [174] ZHAI Y H, LI D Y, QU K S. Probability Fuzzy Attribute Implications for Interval-Valued Fuzzy Sets. *International Journal of Database Theory and Application*, 2012, 5(4): 95–108.
- [175] BĚLOHLÁVEK R, VYCHODIL V. Attribute Implications in a Fuzzy Setting // Proc of the 4th International Conference on Formal Concept Analysis. Berlin, Germany: Springer, 2006: 45–60.
- [176] LI J H, HUANG C C, QI J J, et al. Three-Way Cognitive Concept Learning via Multi-granularity. *Information Sciences*, 2017, 378: 244–263.
- [177] 米允龙,李金海,刘文奇,等. MapReduce 框架下的粒概念认知学习系统研究. 电子学报, 2018, 46(2): 289–297.
(MI Y L, LI J H, LIU W Q, et al. Research on Granular Concept Cognitive Learning System under MapReduce Framework. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(2): 289–297.)
- [178] NIU J J, HUANG C C, LI J H, et al. Parallel Computing Techniques for Concept-Cognitive Learning Based on Granular Computing. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2018, 9(11): 1785–1805.
- [179] HUANG C C, LI J H, MEI C L, et al. Three-Way Concept Learning Based on Cognitive Operators: An Information Fusion Viewpoint. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 83: 218–242.
- [180] LI J H, HUANG C C, XU W H, et al. Cognitive Concept Learning via Granular Computing for Big Data // Proc of the International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Washington, USA: IEEE, 2015: 289–294.
- [181] 李金海,米允龙,刘文奇. 概念的渐进式认知理论与方法. 计算机学报, 2019, 42(10): 2233–2250.
(LI J H, MI Y L, LIU W Q. Incremental Cognition of Concepts: Theories and Methods. *Chinese Journal of Computers*, 2019, 42(10): 2233–2250.)
- [182] 李金海,吴伟志,邓硕. 形式概念分析的多粒度标记理论. 山东大学学报(理学版), 2019, 54(2): 30–40.
(LI J H, WU W Z, DENG S. Multi-scale Theory in Formal Concept Analysis. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2019, 54(2): 30–40.)
- [183] 李金海,李玉斐,米允龙,等. 多粒度形式概念分析的介粒度标记方法. 计算机研究与发展, 2020, 57(2): 447–458.
(LI J H, LI Y F, MI Y L, et al. Meso-Granularity Labeled Method for Multi-granularity Formal Concept Analysis. *Journal of Computer Research and Development*, 2020, 57(2): 447–458.)
- [184] 李金海,贺建君,吴伟志. 多粒度形式概念分析的类属性块优化. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(5): 1–12.
(LI J H, HE J J, WU W Z. Optimization of Class-Attribute Block in Multi-granularity Formal Concept Analysis. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2020, 55(5): 1–12.)
- [185] BELOHLÁVEK R, DE BAETS B, KONECNY J. Granularity of Attributes in Formal Concept Analysis. *Information Sciences*, 2014, 260: 149–170.
- [186] SHE Y H, HE X L, QIAN T, et al. A Theoretical Study on Object-Oriented and Property-Oriented Multi-scale Formal Concept Analysis. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2019, 10(11): 3263–3271.
- [187] SHAO M W, LÜ M M, LI K W, et al. The Construction of Attribute (Object)-Oriented Multi-granularity Concept Lattices. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2020, 11(5): 1017–1032.
- [188] XIE J P, YANG M H, LI J H, et al. Rule Acquisition and Optimal Scale Selection in Multi-scale Formal Decision Contexts and Their Applications to Smart City. *Future Generation Computer Systems*, 2018, 83: 564–581.
- [189] 郝晨,范敏,李金海,等. 多标记背景下基于粒标记规则的最优标记选择. 模式识别与人工智能, 2016, 29(3): 272–280.
(HAO C, FAN M, LI J H, et al. Optimal Scale Selection in Multi-scale Contexts Based on Granular Scale Rules. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2016, 29(3): 272–280.)
- [190] LI J H, LIU Z M. Granule Description in Knowledge Granularity and Representation. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 203: 106160.
- [191] YAO Y Y. Rough-Set Concept Analysis: Interpreting RS-Definable Concepts Based on Ideas from Formal Concept Analysis. *Information Sciences*, 2016, 346/347: 442–462.
- [192] 智慧来,李金海. 基于必然属性分析的粒描述. 计算机学报, 2018, 41(12): 2702–2719.
(ZHI H L, LI J H. Granule Description Based on Necessary Attribute Analysis. *Chinese Journal of Computers*, 2018, 41(12): 2702–2719.)

- [193] ZHI H L, LI J H. Granule Description Based on Positive and Negative Attributes. *Granular Computing*, 2019, 4(3): 337–350.
- [194] ZHI H L, LI J H. Granule Description Based Knowledge Discovery from Incomplete Formal Contexts via Necessary Attribute Analysis. *Information Sciences*, 2019, 485: 347–361.
- [195] WAN Q, LI J H, WEI L, et al. Optimal Granule Level Selection: A Granule Description Accuracy Viewpoint. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2020, 116: 85–105.
- [196] STUMME G, MAEDCHE A. FCA-MERGE: Bottom-up Merging of Ontologies // Proc of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence. San Francisco, USA: Morgan Kaufmann Publishers, 2001: 225–230.
- [197] CHEN R C, BAU C T, YEH C J. Merging Domain Ontologies Based on the Wordnet System and Fuzzy Formal Concept Analysis Techniques. *Applied Soft Computing*, 2011, 11(2): 1908–1923.
- [198] ZHAO Y, WANG X, HALANG W. Ontology Mapping Based on Rough Formal Concept Analysis [C/OL]. [2020-04-07]. <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=1602313>.
- [199] ZHAO M Y, ZHANG S M, LI W Z, et al. Matching Biomedical Ontologies Based on Formal Concept Analysis. *Journal of Biomedical Semantics*, 2018, 9. DOI: 10.1186/s13326-018-0178-9.
- [200] 朱佳,王向前,张宝隆,等.基于形式概念分析的煤矿事故本体构建. *工矿自动化*, 2018, 44(5): 26–30.
(ZHU J, WANG X Q, ZHANG B L, et al. Construction of Coal Mine Accident Ontology Based on Formal Concept Analysis. *Industry and Mine Automation*, 2018, 44(5): 26–30.)
- [201] 金阳,左万利.多维概念格与多维序列模式的增量挖掘. *计算机研究与发展*, 2007, 44(11): 1816–1824.
(JIN Y, ZUO W L. Multi-dimensional Concept Lattice and Incremental Discovery of Multi-dimensional Sequential Patterns. *Journal of Computer Research and Development*, 2007, 44(11): 1816–1824.)
- [202] 刘馨蕊,张伟峰.基于多维多值概念格的矿山生产地学本体构建研究. *地球信息科学学报*, 2018, 20(2): 176–185.
(LIU X R, ZHANG W F. Construction of Mine Production Geo-Ontology Based on Multi-dimensional and Many-Valued Concept Lattices. *Journal of Geo-information Science*, 2018, 20(2): 176–185.)
- [203] 渠寒花,惠建忠,何险峰,等.气象服务形式概念分析模型研究. *计算机工程与应用*, 2018, 54(9): 257–264.
(QU H H, HUI J Z, HE X F, et al. Formal Concept Analysis Model of Meteorological Services. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54(9): 257–264.)
- [204] 覃丽珍,李金海,王扬扬.基于概念格的知识发现及其在高校就业数据分析中的应用. *山东大学学报(理学版)*, 2015, 50(12): 58–64.
(QIN L Z, LI J H, WANG Y Y. Concept Lattice Based Knowledge Discovery and Its Application to Analysis of Employment Data in Universities. *Journal of Shandong University(Natural Science)*, 2015, 50(12): 58–64.)
- [205] 张涛,李慧,任宏雷.博客数据的属性拓扑分析. *燕山大学学报*, 2015, 39(1): 42–50.
(ZHANG T, LI H, REN H L. Attribute Topology Analysis of Blogger Data. *Journal of Yanshan University*, 2015, 39(1): 42–50.)
- [206] AGON C, ANDREATTA M, ATIF J, et al. Musical Descriptions Based on Formal Concept Analysis and Mathematical Morphology // Proc of the International Conference on Conceptual Structures. Berlin, Germany: Springer, 2018: 105–119.
- [207] ZHANG T, LIU M Q, LIU W Y. The Causality Research between Syndrome Elements by Attribute Topology. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2018. DOI: 10.1155/2018/9707581.
- [208] 王慧,秦静,郑涛.量化概念格上网络盗窃行为拟合预测. *中国公安大学学报(自然科学版)*, 2017, 23(2): 63–67.
(WANG H, QIN J, ZHENG T. Fitting Prediction of Network Theft on Quantitative Concept Lattice. *Journal of People's Public Security University of China(Science and Technology)*, 2017, 23(2): 63–67.)
- [209] CASTELLANOS A, CIGARRÁN J, GARCÍA-SERRANO A. Formal Concept Analysis for Topic Detection: A Clustering Quality Experimental Analysis. *Information Systems*, 2017, 66: 24–42.
- [210] HAO S F, SHI C Y, NIU Z D, et al. Concept Coupling Learning for Improving Concept Lattice-Based Document Retrieval. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2018, 69: 65–75.
- [211] ZHANG T, LI H H, LIU M Q, et al. Incremental Concept-Cognitive Learning Based on Attribute Topology. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2020, 118: 173–189.
- [212] 王凯,杨枢,刘玉文.基于多层次概念格的图像场景语义分类方法. *山西师范大学学报(自然科学版)*, 2017, 31(2): 27–34.
(WANG K, YANG S, LIU Y W. A Semantic Classification Method of Image Scene Based on Concept Lattice Hierarchy. *Journal of Shanxi Normal University(Natural Science Edition)*, 2017, 31(2): 27–34.)
- [213] 王亚平,张素兰,张继福,等.基于模糊概念格的视觉单词生成方法. *小型微型计算机系统*, 2016, 37(8): 1868–1872.
(WANG Y P, ZHANG S L, ZHANG J F, et al. Visual Words Generation Method Based on the Fuzzy Concept Lattice. *Journal of Chinese Computer Systems*, 2016, 37(8): 1868–1872.)
- [214] YAO Y Y. Interpreting Concept Learning in Cognitive Informatics

- and Granular Computing. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (Cybernetics)*, 2009, 39(4): 855–866.
- [215] WANG Y X. On Concept Algebra: A Denotational Mathematical Structure for Knowledge and Software Modelling. *International Journal of Cognitive Informatics and Natural Intelligence*, 2008, 2(2): 1–19.
- [216] KUMAR C A, ISHWARYA M S, LOO C K. Formal Concept Analysis Approach to Cognitive Functionalities of Bidirectional Associative Memory. *Biologically Inspired Cognitive Architectures*, 2015, 12: 20–33.
- [217] FAN B J, TSANG E C C, XU W H, et al. Attribute-Oriented Cognitive Concept Learning Strategy: A Multi-level Methods. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2019, 10(9): 2421–2437.
- [218] YAN E L, SONG J L, REN Y L, et al. Construction of Three-Way Attribute Partial Order Structure via Cognitive Science and Granular Computing. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 197: 105859.
- [219] 张文修,徐伟华. 基于粒计算的认知模型. *工程数学学报*, 2007, 24(6): 957–971.
(ZHANG W X, XU W H. Cognitive Model Based on Granular Computing. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2007, 24(6): 957–971.)
- [220] 张清华,周玉兰,腾海涛. 基于粒计算的认知模型. *重庆邮电大学学报(自然科学版)*, 2009, 21(4): 494–501.
(ZHANG Q H, ZHOU Y L, TENG H T. Cognition Model Based on Granular Computing. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science Edition)*, 2009, 21(4): 494–501.)
- [221] CHEN J K, MI J S, LIN Y J. A Graph Approach for Knowledge Reduction in Formal Contexts. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 148: 177–188.
- [222] MAO H, MIAO H R. Attribute Reduction Based on Directed Graph in Formal Fuzzy Contexts. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2018, 34(6): 4139–4148.
- [223] GUO L K, LI Q G, ZHANG G Q. A Representation of Continuous Domains via Relationally Approximable Concepts in a Generalized Framework of Formal Concept Analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2019, 114: 29–43.
- [224] LANG G M, LUO J F, YAO Y Y. Three-Way Conflict Analysis: A Unification of Models Based on Rough Sets and Formal Concept Analysis. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 194. DOI: 10.1016/j.knosys.2020.105556.
- [225] 徐伟华,李金海,魏玲,等. 形式概念分析理论与应用. 北京: 科学出版社, 2016.
(XU W H, LI J H, WEI L, et al. *Formal Concept Analysis: Theory and Application*. Beijing, China: Science Press, 2016.)
- [226] POELMANS J, IGNATOV D I, KUZNETSOV S O, et al. Formal Concept Analysis in Knowledge Processing: A Survey on Applications. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(16): 6538–6560.
- [227] MA J M, ZHANG W X. Axiomatic Characterizations of Dual Concept Lattices. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2013, 54(5): 690–697.
- [228] SONG X X, WANG X, ZHANG W X. Independence of Axiom Sets Characterizing Formal Concepts. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2013, 4(5): 459–468.
- [229] 张慧雯,刘文奇,李金海. 不完备形式背景下近似概念格的公理化方法. *计算机科学*, 2015, 42(6): 67–70, 92.
(ZHANG H W, LIU W Q, LI J H. Axiomatic Characterizations of Approximate Concept Lattices in Incomplete Contexts. *Computer Science*, 2015, 42(6): 67–70, 92.)
- [230] 陈锦坤,李进金. 概念格的公理化. *计算机工程与应用*, 2012, 48(5): 41–43.
(CHEN J K, LI J J. Axiomatization of Concept Lattice. *Computer Engineering and Applications*, 2012, 48(5): 41–43.)
- [231] SHAO M W, WU W Z, WANG C Z. Axiomatic Characterizations of Adjoint Generalized(Dual) Concept Systems. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2019, 37(3): 3629–3638.
- [232] POELMANS J, KUZNETSOV S O, IGNATOV D I, et al. Formal Concept Analysis in Knowledge Processing: A Survey on Models and Techniques. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(16): 6601–6623.
- [233] POELMANS J, IGNATOV D I, KUZNETSOV S O, et al. Fuzzy and Rough Formal Concept Analysis: A Survey. *International Journal of General Systems*, 2014, 43(2): 105–134.
- [234] REN R S, WEI L, YAO Y Y. An Analysis of Three Types of Partially-Known Formal Concepts. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2018, 9(11): 1767–1783.
- [235] 仇国芳,张志霞,张炜. 基于粗糙集方法的概念格理论研究综述. *模糊系统与数学*, 2014, 28(1): 168–177.
(QIU G F, ZHANG Z X, ZHANG W. A Survey for Study on Concept Lattice Theory via Rough Set. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2014, 28(1): 168–177.)
- [236] YANG H Z, LEUNG Y, SHAO M W. Rule Acquisition and Attribute Reduction in Real Decision Formal Contexts. *Soft Computing*, 2011, 15(6): 1115–1128.
- [237] JANOSTIK R, KONECNY J. General Framework for Consistencies in Decision Contexts. *Information Sciences*, 2020, 530: 180–200.
- [238] ZHANG Z, DU J, WANG L M. Formal Concept Analysis Approach for Data Extraction from a Limited Deep Web Database. *Journal of Intelligent Information Systems*, 2013, 41(2): 211–234.

- [239] XU J, WANG G Y, LI T R, et al. Local-Density-Based Optimal Granulation and Manifold Information Granule Description. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(10): 2795–2808.
- [240] ZHU X B, PEDRYCZ W, LI Z W. Granular Data Description: Designing Ellipsoidal Information Granules. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(12): 4475–4484.
- [241] KUZNETSOV S O. Machine Learning on the Basis of Formal Concept Analysis. *Automation and Remote Control*, 2001, 62(10): 1543–1564.
- [242] IGNATOV D I, GNATYSHAK D V, KUZNETSOV S O, et al. Triadic Formal Concept Analysis and Triclustering: Searching for Optimal Patterns. *Machine Learning*, 2015, 101(1/2/3): 271–302.
- [243] 于剑. 图灵测试的明与暗. *计算机研究与发展*, 2020, 57(5): 906–911.
(YU J. Brilliance and Darkness: Turing Test. *Journal of Computer Research and Development*, 2020, 57(5): 906–911.)

- [244] 李金海,闫梦宇,徐伟华,等. 概念认知学习的若干问题与思考. *西北大学学报(自然科学版)*, 2020, 50(4): 501–515.
(LI J H, YAN M Y, XU W H, et al. Some Problems and Thoughts in Concept-Cognitive Learning. *Journal of Northwest University(Natural Science Edition)*, 2020, 50(4): 501–515.)

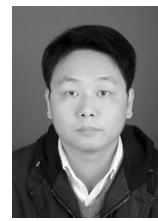
作者简介



李金海(通讯作者),博士,教授,主要研究方向为认知计算、粒计算、大数据分析、概念格、粗糙集等. E-mail: jhli@xjtu.edu.cn.
(**LI Jinhai**(Corresponding author), Ph. D. , professor. His research interests include cognitive computing, granular computing, big data analysis, concept lattice and rough set.)

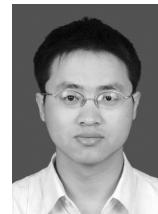


魏玲,博士,教授,主要研究方向为形式概念分析、粗糙集、粒计算等. E-mail: wl@nwu.edu.cn.
(**WEI Ling**, Ph.D. , professor. Her research interests include formal concept analysis, rough set and granular computing.)



张卓,博士,副教授,主要研究方向为分布式人工智能、形式概念分析及其应用等. E-mail: iezhangzhuo@zzu.edu.cn.

(**ZHANG Zhuo**, Ph. D. , associate professor. His research interests include distributed artificial intelligence, and formal concept analysis and its application.)



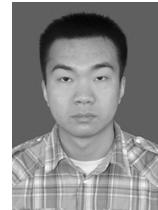
翟岩慧,博士,副教授,主要研究方向为知识表示与推理、粒计算、概念格等. E-mail: chai_yanhui@163.com.

(**ZHAI Yanhui**, Ph.D. , associate professor. His research interests include knowledge representation and reasoning, granular computing and concept lattice.)



张涛,博士,副教授,主要研究方向为概念格、粒计算、机器学习等. E-mail: zhtao@ysu.edu.cn.

(**ZHANG Tao**, Ph.D. , associate professor. His research interests include concept lattice, granular computing and machine learning.)



智慧来,博士,副教授,主要研究方向为粒计算、形式概念分析、粗糙集等. E-mail: zhihuilai@126.com.

(**ZHI Huilai**, Ph. D. , associate professor. His research interests include granular computing, formal concept analysis and rough set.)



米允龙,博士,讲师,主要研究方向为数据挖掘、神经网络、形式概念分析等. E-mail: MiYunlong17@mails.ucas.ac.cn.

(**Mi Yunlong**, Ph. D. , lecturer. His research interests include data mining, neural network and formal concept analysis.)